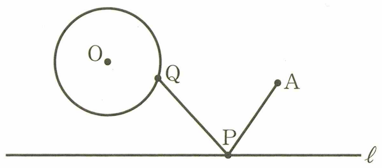
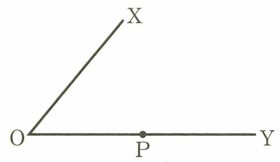
混合問題

A

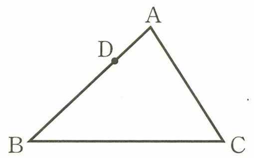
1 右の図のように，直線ℓと点A，および点Oを中心とする円Oが与えられている．点Pが直線ℓ上を，点Qが円Oの周上を動くとき，AP+PQが最小値をとるような点P，Qを作図する方法を述べよ．また，その作図の方法が正しいことを証明せよ．



2 右の図は，∠XOYと半直線OY上の点Pである．このとき，PでOYに接する円のうち，半直線OXにも接する円を作図する方法を述べよ．また，その作図の方法が正しいことを証明せよ．



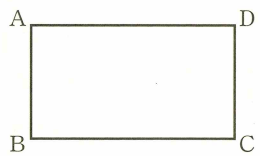
3 右の図のように，△ABCと辺AB上の点Dがある．点Dを通り，△ABCの面積を２等分する直線ℓを作図する方法を述べよ．また，その作図の方法が正しいことを証明せよ．



4 点Oを中心とする円Oと，円周上の点Aが与えられたとき，この円に内接し，Aを１つの頂点とする正三角形を作図する方法を述べよ．また，その作図の方法が正しいことを証明せよ．

B

5 与えられた長方形ABCD(AB<BC)と等しい面積をもつ正方形を作図する方法を述べよ．また，その作図の方法が正しいことを証明せよ．



6 点O_1，O_2を中心とする２つの円O_1(半径r_1)，O_2(半径r_2)がある．ただし，$r_1>r_2$であり，２つの円は異なる２点で交わっているものとする．このとき，この２つの円の共通接線を作図する方法を述べよ．また，その作図の方法が正しいことを証明せよ．

7 線分ABが与えられているとき，ABを１辺とする正五角形を作図する方法を述べよ．また，その作図の方法が正しいことを証明せよ．

■ヒント

5　点Bを基点とする．点Bからの距離の２乗がAB·BCに等しくなるような点の作図を考える．

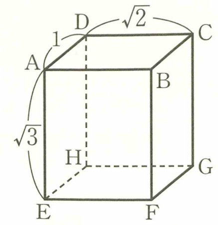
6　O_1を中心とし，半径r_1-r_2の円をかいて考える．

7　まず，正五角形において，１辺と対角線の比がどうなっているかを考える．

4 空間図形

例題 1　2直線の位置関係

右の図の直方体ABCD-EFGHについて，次の問いに答えよ．



(1) 辺ABと次のような位置関係にある辺を答えよ．

①　平行　　②　垂直　　③　ねじれの位置

(2) 直線ADと直線BGのなす角θを求めよ．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$とする．

解 (1) ①　辺ABと同一平面上にあり，交わらないものだから，

DC，EF，HG

②　辺ABは平面BFGCに垂直なので，辺BC，BF，CG，FGと垂直である．よって，これらと平行な４辺AD，AE，DH，EHとも垂直である．

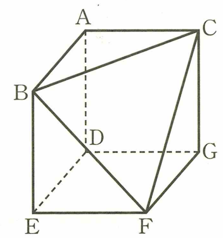
以上より，**BC，BF，CG，FG，AD，AE，DH，EH**

③　辺ABと平行でなく，交わらないものだから，**CG，FG，DH，EH**

(2) 直線ADと直線BGのなす角はADとAHのなす角に等しい．したがって，$\boldsymbol{\theta=60°}$

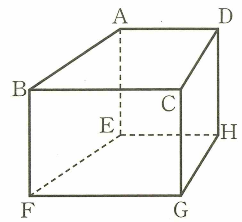
1 次の立体において，〔　　〕内の辺と平行，垂直，ねじれの位置にある辺をそれぞれ答えよ．

(1)〔辺BF〕



(立方体から三角錐を切り取った立体ABC-DEFG)

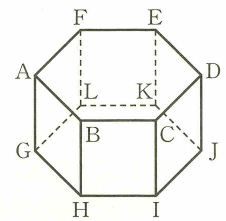
(2)〔辺AD〕



(底面がAD//BC，∠D=90°の台形である四角柱ABCD-EFGH)

2 右の図のようなすべての辺の長さが１である正六角柱ABCDEF-GHIJKLにおいて，次の２直線のなす角θを求めよ．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$とする．

(1) AB，IJ　　(2) AB，EJ　　(3) DE，HL



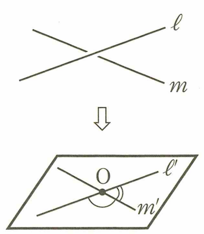
●ポイント

①　空間における２直線の位置関係

交わる		同一平面上にある
交わらない	平行	同一平面上にある
	ねじれの位置	同一平面上にない

②　２直線ℓ，mが平行であるとき，$\boldsymbol{\ell /\!/ m}$と書く．

③　２直線ℓ，mに平行で，任意の１点Oを通る２直線ℓ'，m'を考えると，２直線ℓ'，m'は１つの平面上にあり，そのなす角は，点Oのとり方によらず一定である．この角を**２直線ℓ，mのなす角**という．

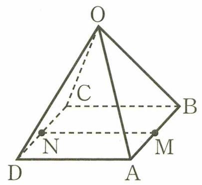


④　２直線ℓ，mのなす角が直角であるとき，ℓとmは**垂直**であるといい，$\boldsymbol{\ell \perp m}$と書く．特に，垂直な２直線が交わるとき，それらは**直交**するという．

⑤　平行な２直線の一方に垂直な直線は，他方にも垂直である．

例題 2　直線と平面の位置関係

右の図の正四角錐O–ABCDで，点M，Nがそれぞれ辺AB，CDの中点であるとき，辺ABは平面OMNに垂直であることを証明せよ．



解　△OABは，OA＝OBの二等辺三角形であるから OM⊥AB　また，四角形ABCDは正方形なので，四角形AMNDは長方形である．
よって，MN⊥AB　したがって，直線ABは平面OMN上の交わる2直線に垂直なので，平面OMNに垂直である．

3　図1の正四面体ABCDにおいて，辺BCの中点をMとする．
(1)　辺BCは平面AMDに垂直であることを証明せよ．
(2)　(1)から，BC⊥ADであることを証明せよ．

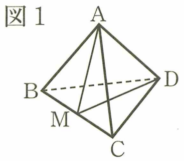
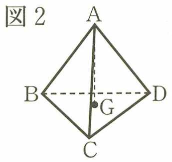
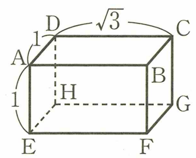
図1


図2


4　図2の正四面体ABCDにおいて，△BCDの重心をGとする．このとき，直線AGは平面BCDに垂直であることを証明せよ．

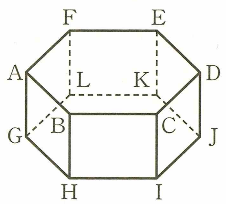
例題 3　2平面の位置関係

右の図の直方体ABCD–EFGHにおいて，次の2平面のなす角θを求めよ．ただし，$0°\leqq\theta\leqq 90°$とする．
(1)　平面ABGHと平面EFGH　　(2)　平面AEGCと平面DHGC



解　(1)　直線BG，FGはそれぞれ平面ABGH，平面EFGH上にあり，ともに2平面の交線HGに垂直だから，2平面のなす角は直線BGとFGのなす角に等しい．よって，$\boldsymbol{\theta=45°}$
(2)　直線AC，DCはそれぞれ平面AEGC，平面DHGC上にあり，ともに2平面の交線CGに垂直だから，2平面のなす角は直線ACとDCのなす角に等しい．よって，$\boldsymbol{\theta=30°}$

5　右の図の正六角柱ABCDEF–GHIJKLにおいて，次の問いに答えよ．
(1)　平面ABHGと平行な平面を答えよ．
(2)　平面ABHGと平面BHJDのなす角θ $(0°\leqq\theta\leqq 90°)$を求めよ．
(3)　平面ABHGと平面CDJIのなす角θ $(0°\leqq\theta\leqq 90°)$を求めよ．



●ポイント

①　直線ℓと平面αの位置関係……(1)ℓはαに含まれる，(2)交わる，(3)平行である
②　直線ℓが平面α上のすべての直線に垂直ならば，ℓはαに**垂直**である，またはαに**直交**するといい，$\boldsymbol{\ell\perp\alpha}$と書く．また，$\ell$を平面$\alpha$の**垂線**という．
③　直線ℓが平面α上の交わる2直線に垂直ならば，ℓはαに垂直である．
→図1（ただし，α上の交わる2直線はℓと交わる必要はないことに注意）
④　2平面の位置関係……(1)交わる（交わりの線を**交線**という），(2)平行である
⑤　2平面α，βが平行であるとき，$\boldsymbol{\alpha /\!/ \beta}$と書く．
⑥　右の図2において，角θを**2平面α，βのなす角**という．なす角が直角であるとき，α，βは**垂直**である，または**直交**するといい，$\boldsymbol{\alpha\perp\beta}$と書く．

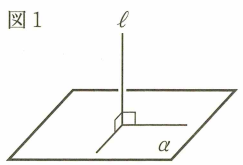
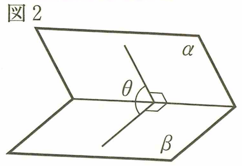
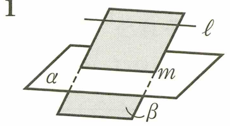
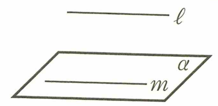
図1


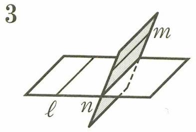
図2


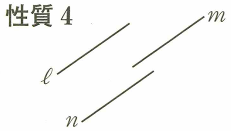
例題 4　位置関係と証明

直線や平面の位置関係について，次のような性質がある．（α，βは平面，ℓ，m，nは直線）
性質1　$\ell /\!/ \alpha$のとき，ℓを含む平面βと平面αとの交線をmとすると，$\ell /\!/ m$
性質2　$\ell /\!/ m$のとき，mを含みℓを含まない平面をαとすると，$\ell /\!/ \alpha$
性質3　$\ell /\!/ m$のとき，一方を含み他方を含まない2平面の交線をnとすると，$\ell /\!/ n$，$m /\!/ n$
性質4　3直線ℓ，m，nについて，$\ell /\!/ m$，$m /\!/ n$ならば，$\ell /\!/ n$

性質1


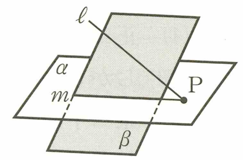
性質2


性質3


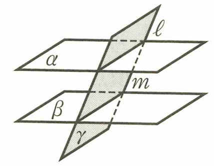
性質4


上の**性質1**を証明せよ．

解　$\ell \not\parallel m$と仮定する．このとき，ℓ，mは平面β上の2直線なので1点Pで交わる．また，mは平面α上の直線でもあるので点Pもα上の点である．よって，ℓとαが交わることとなり，$\ell /\!/ \alpha$に矛盾する．
したがって，$\ell /\!/ m$である．



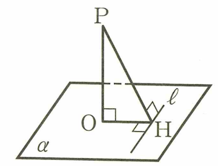
6　平行な2平面をα，βとする．平面γとα，βとの交線をそれぞれℓ，mとするとき，$\ell /\!/ m$であることを，上の**性質1**を用いて証明せよ．



7　次の問いに答えよ．
(1)　上の**性質2**を証明せよ．（$\ell \not\parallel \alpha$と仮定し，背理法を用いて証明せよ．）
(2)　上の**性質1**および**性質2**を用いて，**性質3**を証明せよ．

例題 5　三垂線の定理

三垂線の定理　平面α上の直線ℓ，直線ℓ上の点H，ℓ上にないα上の点O，平面α上にない点Pがあるとき，次の①～③が成り立つ．
①　OP⊥α，OH⊥ℓならば，PH⊥ℓ
②　OP⊥α，PH⊥ℓならば，OH⊥ℓ
③　PH⊥ℓ，OH⊥ℓ，OH⊥OPならば，OP⊥α



上の①を証明せよ．

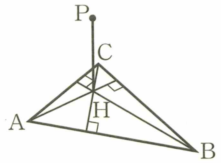
解　OP⊥αより，OPはα上の直線ℓに垂直である．すなわち，OP⊥ℓ
また，仮定より，OH⊥ℓ
よって，ℓは平面OHPに垂直で，平面OHP上の任意の直線に垂直である．よって，PH⊥ℓ

8　上の②，③を証明せよ．

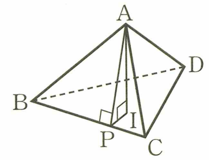
●ポイント

①　直線や平面が平行でないときは，記号$\not\parallel$を用いて，$\ell \not\parallel m$，$\ell \not\parallel \alpha$，$\alpha \not\parallel \beta$のように表す．

9 △ABCで定まる平面上にない点Pをとり，Pから△ABCに引いた垂線の足をHとする．Hが△ABCの垂心ならば，AP⊥BC であることを証明せよ．



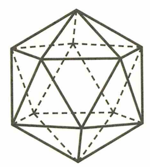
10 四面体ABCDにおいて，△BCDの内心をI，△BCDの内接円と辺BCとの接点をPとする．AP⊥BC，AI⊥PI ならば，AIは平面BCDに垂直であることを証明せよ．



例題 6　多面体①

正二十面体において，次のものを求めよ．

(1)　頂点の数　　　　(2)　辺の数



解 (1)　正二十面体の20個の面の頂点の数の合計は，$3\times20=60$

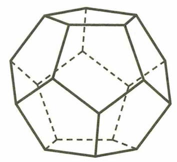
しかし，これらの頂点は５個ずつ重なっているから，$60\div5=\mathbf{12}$

(2)　正二十面体の20個の面の辺の数の合計は，$3\times20=60$

しかし，これらの辺は２個ずつ重なっているから，$60\div2=\mathbf{30}$

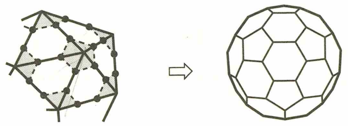
11 正十二面体において，次のものを求めよ．

(1)　頂点の数　　　　(2)　辺の数



12 正二十面体の各辺を３等分する点を通る平面で頂点を切り取ってできる図のような多面体について，次のものを求めよ．

(1)　頂点の数　　　　(2)　辺の数



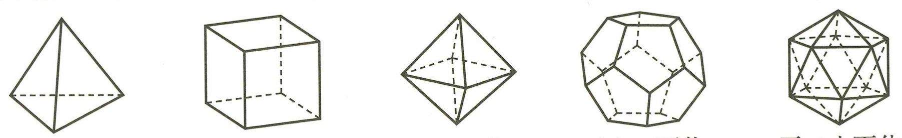
13 正 n 角柱の２つの底面に，合同な底面をもつ２つの正 n 角錐を貼り付けてできた多面体の頂点，辺，面の数をそれぞれ v，e，f とする．

(1)　v，e，f をそれぞれ n を用いて表せ．

(2)　$v-e+f=2$ が成り立つことを示せ．

●ポイント

① 〔**正多面体**〕 各面が合同な正多角形で，各頂点に集まる面，辺の数が等しいものを**正多面体**とよぶ．正多面体には次の５種類がある．



正四面体　　正六面体(立方体)　　正八面体　　正十二面体　　正二十面体

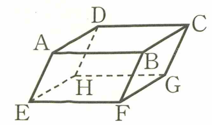
② 多面体のうち，どの２つの頂点を結んだ線分も多面体内に含まれるものを**凸多面体**という．

③ 〔**オイラーの多面体定理**〕 凸多面体で，頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると，

$\boldsymbol{v-e+f=2}$

例題 7　多面体②

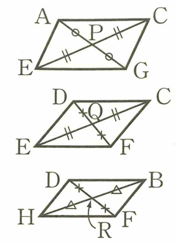
右の図のように，３組の平行な平面で囲まれた立体を平行六面体という．平行六面体の対角線は同一の点で交わり，互いに他を２等分することを証明せよ．



解　平行六面体をABCD-EFGHとして考える．

四角形AEGCは平行四辺形なので，対角線AGとCEの交点をPとすると，AP=PG，CP=PE である．同様に，四角形DEFC，BDHFも平行四辺形なので，それぞれの対角線の交点をQ，Rとすると，CQ=QE，DQ=QF，DR=RF，BR=RH である．よって，PとQはともに線分CEの中点，QとRはともに線分DFの中点となるから，３点P，Q，Rは一致し，この点で平行六面体ABCD-EFGHの４本の対角線はすべて交わる．

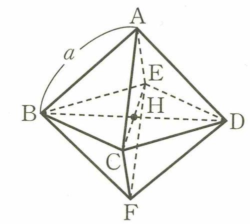
したがって，平行六面体の対角線は同一の点で交わり，互いに他を２等分する．



14 四面体のねじれの位置にある辺の中点どうしを結ぶ３本の線分は１点で交わることを証明せよ．

例題 8　立体の計量

１辺の長さ a の正八面体の体積 V を求めよ．



解　右の図の正八面体において，ひし形BCDEの対角線の交点をHとする．点Hは二等辺三角形ABDの底辺BDの中点であるから，AH⊥BD　同様に，AH⊥CE であり，AHは平面BCDEに垂直である．また，△ABH≡△ACH よりBH=CHであるから，対角線の長さが等しくなり，ひし形BCDEは正方形である．

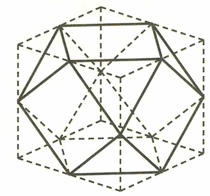
$$\mathrm{BH}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\quad \mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

正八面体の体積は四角錐A-BCDEの体積の２倍なので，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\mathrm{BC}^2\cdot\mathrm{AH}\times2=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\times2=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3}$$

15 １辺の長さ a の正四面体の体積を求めよ．ただし，１つの頂点から向かい合う面に下ろした垂線の足はその面の重心と一致することは利用してよい．

16 右の立体は，１辺の長さ２の立方体から各辺の中点を通る平面で頂点を切り落としてできた立体である．次の問いに答えよ．

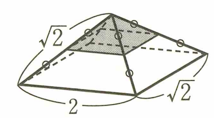


(1)　右の立体の体積を求めよ．

(2)　右の立体の各辺の中点を通る平面で頂点を切り落としてできる立体の体積を求めよ．

●ポイント

①　**16** (2)　切り落とされる立体は，図の影の部分のような，底面が長方形の四角錐である．



例題 9　方べきの定理と球

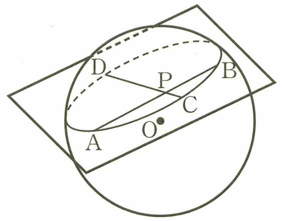
球Oの表面上に4点A，B，C，Dをとったところ，直線ABと直線CDが球の内部の点Pで交わった．このとき，**PA·PB=PC·PD** が成り立つことを証明せよ．

解　空間内の２直線が交わるとき，その２直線は同一平面上にある．

直線ABと直線CDが球の内部の点Pで交わることから，５点A，B，C，D，Pは同一平面上にある．

また，球を１つの平面で切ると，切断面はいつも円になる．

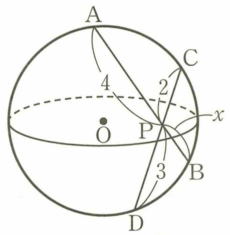
球Oを５点A，B，C，D，Pを通る平面で切ったときの切断面の円において，方べきの定理を用いると，PA·PB=PC·PD



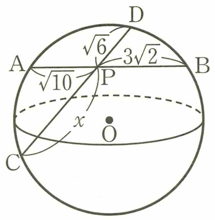
〔補足〕　直線ABと直線CDが球の外部の点Pで交わる場合も，同じ等式が成り立つ．

17 下の図において，x の値を求めよ．ただし，４点A，B，C，Dは球Oの表面上の点，点Pは直線ABと直線CDの交点とする．

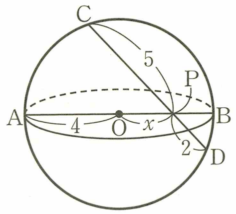
(1)



(2)

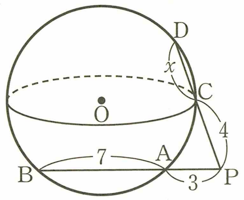


(3)

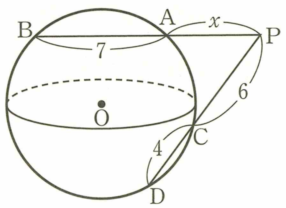


18 下の図において，x の値を求めよ．ただし，４点A，B，C，Dは球Oの表面上の点，点Pは直線ABと直線CDの交点とし，(3)の直線PTは接点をTとする球Oの接線とする．

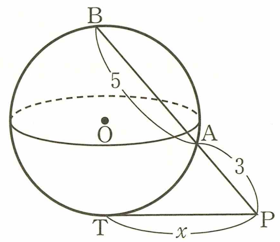
(1)



(2)

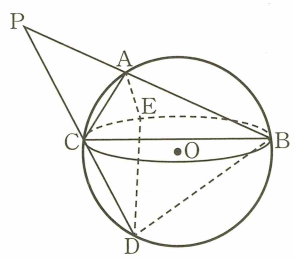


(3)



19 右の図のように，４点A，B，C，Dは球Oの表面上にあり，直線ABと直線CDは，球の外部の点Pで交わっている．また，図は，２点B，Cを通る平面で球Oを切ったときの切り口の円において，円周上に点B，Cと異なる点Eをとったことを示している．

PA=4，AB=5，PD=8 のとき，三角錐A-BCEの体積と三角錐D-BCEの体積の比を求めよ．



●ポイント

① 球を１つの平面で切ると，切り口は常に円となる．この平面上の円と交わる２直線において，p.76，77の方べきの定理が成り立つ．

混合問題

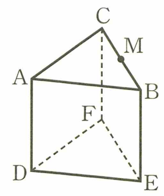
A

1 右の図の正三角柱ABC-DEFについて，辺BCの中点をMとするとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分AMと垂直かつねじれの位置にある辺を答えよ．

(2) 平面ACFDと平面BEFCのなす角 θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$) を求めよ．

(3) 直線BCと３点A，M，Dを通る平面が垂直であることを証明せよ．

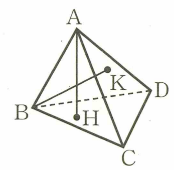


2 ３つの平行な平面 α，β，γ と２直線 ℓ，ℓ' との交点をそれぞれA，B，CおよびA′，B′，C′とするとき，

AB : BC=A′B′ : B′C′ であることを証明せよ．ただし，右のことを用いてよい．

> 平行な２平面 α，β と他の平面との交線を ℓ，m とすると，$\ell /\!/ m$ である．

3 四面体ABCDにおいて，辺ABと辺CDが垂直ならば，頂点Aから平面BCDへ下ろした垂線AHと，頂点Bから平面CDAへ下ろした垂線BKは交わることを示せ．



4 正八面体の各面の重心を結んで立体をつくる．

(1) どんな立体か．

(2) できた立体の体積はもとの正八面体の体積の何倍か．

B

5 同一平面上にない３直線 ℓ，m，n について，$\ell /\!/ m$，$m /\!/ n$ ならば $\ell /\!/ n$ であることを証明せよ．ただし，右のことを用いてよい．

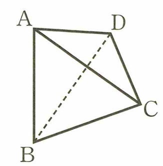
> $\ell /\!/ m$ のとき，一方を含み他方を含まない２平面の交線を n とすると，$\ell /\!/ n$，$m /\!/ n$

6 四面体ABCDにおいて，△BCDの重心をG，辺AB，CD，AD，BCの中点をそれぞれM，N，P，Qとする．このとき，直線AG，MN，PQは１点で交わることを示せ．

7 １辺の長さが２である右の図のような正四面体ABCDを，直線ABを軸にして１回転させる．次の問いに答えよ．

(1) この正四面体の内部が通過する部分の体積を求めよ．

(2) △ACDが通過する部分の体積を求めよ．



■ヒント

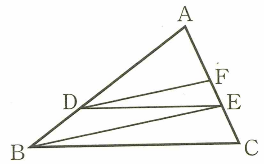
5　ℓ，m によって定まる平面，ℓ 上の１点と n によって定まる平面の交線を考える．

6　まず，AGとMN，AGとPQがそれぞれ交わることを示す．次に，交点が一致することを示す．

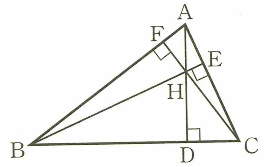
7　平面図形の回転に帰着させて考えることができる．

章末問題 A

1 右の図で，$BC /\!/ DE$，$BE /\!/ DF$ ならば，$AE^2=AC \cdot AF$ であることを証明せよ．

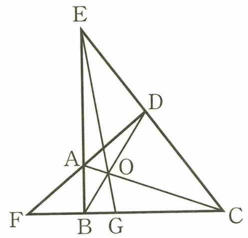


2 鋭角三角形ABCの３頂点A，B，Cから対辺に引いた垂線を，それぞれAD，BE，CFとし，垂心をHとする．Hは△DEFの内心であることを証明せよ．

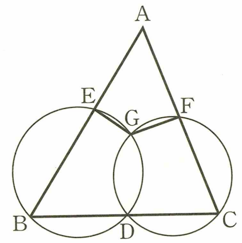


3 対辺が平行でない四角形ABCDで，辺AB，DCの延長の交点をE，辺AD，BCの延長の交点をF，対角線AC，BDの交点をOとする．直線EOと辺BCとの交点をGとするとき，

$\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{BF}{FC}$ であることを証明せよ．

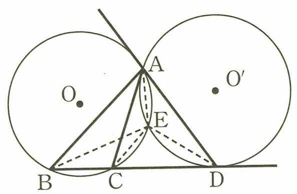


4 右の図のように，△ABCの辺BC上に点Dがある．２点B，Dを通る円が辺ABと交わる点をE，２点C，Dを通る円が辺ACと交わる点をFとし，この２円が交わる点のうち，Dでない方をGとする．このとき，四角形AEGFは円に内接することを証明せよ．



5 右の図のように，円Oに内接する△ABCがある．点Aにおける円Oの接線と直線BCとの交点をDとする．また，点Aを通り，点Dで直線BDに接する円を円O′とし，円O′と円Oとの交点のうち，点A以外の点をEとする．

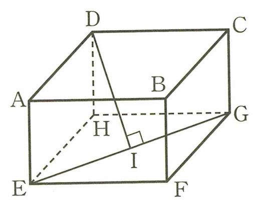
このとき，△ABE∽△CDE であることを証明せよ．



6 直方体ABCD-EFGHにおいて，辺AB，AD，AEの長さをそれぞれ a，b，c とする．また，頂点Dから直線EGに下ろした垂線の足をIとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $HI \perp EG$ であることを証明せよ．

(2) 線分DIの長さを求めよ．



章末問題 B

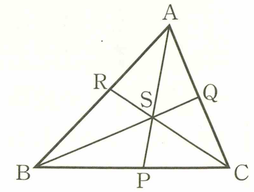
1 次の問いに答えよ．

(1) △ABCの辺BC，CA，AB上に，それぞれ点P，Q，Rがあり，３直線AP，BQ，CRが１点Sで交わるとする．このとき，

$\dfrac{AS}{SP}=\dfrac{AR}{RB}+\dfrac{AQ}{QC}$ であることを証明せよ．

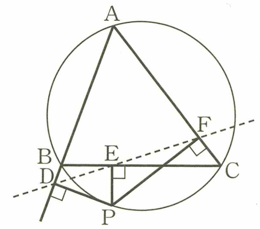
(2) △ABCの内心をIとし，AIと辺BCの交点をPとする．３辺BC，CA，ABの長さをそれぞれ a，b，c とするとき，(1)の結果を用いて，

$\dfrac{AI}{IP}$ の値を，a，b，c を用いて表せ．

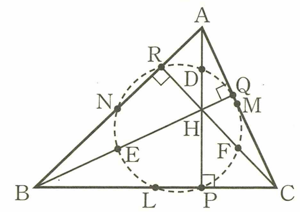


2 △ABCの外接円の周上の点Pから，辺AB，BC，CAまたは，その延長上に下ろした垂線との交点を，それぞれD，E，Fとするとき，３点D，E，Fは一直線上にあることを証明せよ．

（この直線をシムソン線という）



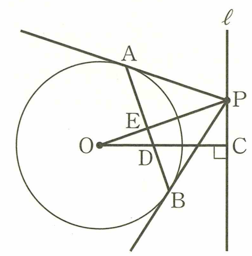
3 右の図のように，三角形の３辺の中点をL，M，N，３頂点からそれぞれ対辺に下ろした垂線との交点をP，Q，R，３頂点と垂心を結ぶ線分の中点をD，E，Fとする．これら９個の点は同一円周上にあることを証明せよ．（この円を九点円という）



4 円O，および円Oと交わらない直線 ℓ があり，円Oの半径は一定，点Oと直線 ℓ との距離も一定であるとする．ℓ 上を動く点Pから円Oに接線を引き，接点をA，Bとする．また，点Oから直線 ℓ に垂線OCを下ろし，弦ABとOCとの交点をDとする．

(1) 直線OPと弦ABとの交点をEとするとき，△APE≡△BPE を証明せよ．

(2) 線分ODの長さは，点Pの位置によらず一定であることを証明せよ．



5 図のような１辺の長さ１の正二十面体を考える．

(1) この正二十面体に外接する球の半径を r とするとき，r^2 の値を求めよ．

(2) この正二十面体の体積を求めよ．