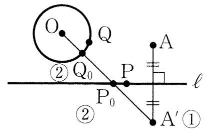
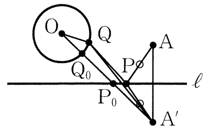
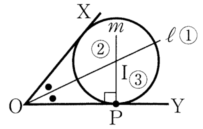
P86 〔混合問題〕

1 〔作図〕①直線ℓに関して点Aと対称な点をA′とする．
②線分OA′と直線ℓ，円Oとの交点をそれぞれP_0，Q_0とする．
点P，QがそれぞれP_0，Q_0と一致するとき，AP+PQは最小値をとる．
〔証明〕$AP+PQ=A'P+PQ\geqq A'Q$
また，$A'Q+OQ\geqq OA'$より，$A'Q\geqq OA'-OQ$
したがって，$AP+PQ\geqq OA'-OQ=OA'-OQ_0=A'Q_0$
等号は点P，QがそれぞれP_0，Q_0と一致するとき成立する．

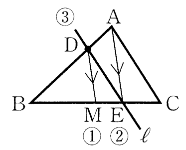




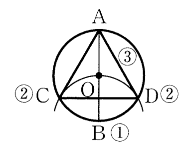
2 〔作図〕①∠XOYの二等分線ℓを引く．
②点Pを通り半直線OYに垂直な直線mを引く．
③ℓとmの交点をIとし，Iを中心とする半径IPの円をかく．
この円が求める円である．
〔証明〕IからOXに引いた垂線とOXとの交点をQとする．
OIは共通，∠IOP=∠IOQ，∠IPO=∠IQO=90°より，
△IOP≡△IOQだから，IP=IQ
よって，QはIPを半径とする円の周上にあり，IQ⊥OXであるから，OXは円Iの接線となる．



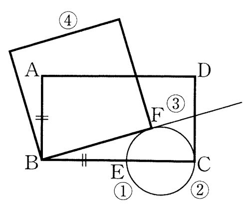
3 〔作図〕①辺BCの中点をMとする．
②Aを通り直線DMに平行な直線と辺BCとの交点をEとする．
③D，Eを通る直線を引く．
この直線が求める直線ℓである．
〔証明〕点Mは辺BCの中点なので，$\triangle ABM=\frac{1}{2}\triangle ABC$
AE∥DMより，△DME=△DMAなので，
△BED=△BMD+△DME=△BMD+△DMA=△ABM
よって，$\triangle BED=\frac{1}{2}\triangle ABC$が成り立ち，直線DEは△ABCの面積を2等分する．



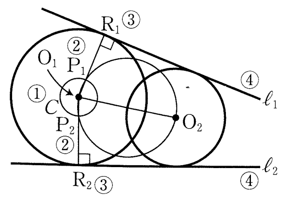
4 〔作図〕①直線AOを引き，Aと異なる円Oとの交点をBとする．
②Bを中心とする半径BOの円と円Oとの交点をC，Dとする．
③3点A，C，Dを頂点とする三角形をかく．
この三角形が求める正三角形である．
〔証明〕△OBC，△OBDは正三角形だから，∠COD=2×60°=120°
また，∠AOC=∠DOA=180°−60°=120°である．よって，円周角の定理より，
$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ$　同様にして，∠ADC=∠ACD=60°
3つの角が等しいから，△ACDは正三角形である．



5 〔作図〕①辺BC上に，点EをBE=BAとなるようにとる．
②線分ECを直径とする円をかく．
③点Bからこの円に接線を引き，接点をFとする．
④線分BFを1辺とする正方形をかく．
この正方形が求める正方形である．
〔証明〕方べきの定理により，$BF^2=BE\cdot BC$，すなわち，$BF^2=AB\cdot BC$が成り立つから，BFを1辺とする正方形の面積は，与えられた長方形の面積に等しい．

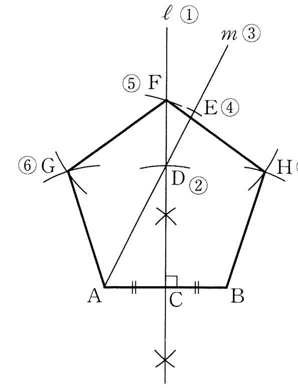


6 〔作図〕①O_1を中心とする半径r_1-r_2の円Cをかく．
②O_1O_2を直径とする円と円Cとの交点をP_1，P_2とする．
③半直線O_1P_1と円O_1との交点をR_1，半直線O_1P_2と円O_1との交点をR_2とする．
④R_1を通りO_1R_1に垂直な直線ℓ_1，R_2を通りO_1R_2に垂直な直線ℓ_2を引く．
ℓ_1，ℓ_2が2円O_1，O_2の共通接線である．

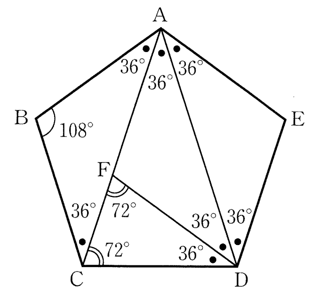


〔証明〕②から，$\angle O_1P_1O_2=90^\circ$なので，直線$O_2P_1$は円$C$の接線で，$O_2P_1\perp O_1R_1$である．
④から，ℓ_1は円O_1の接線で，$\ell_1\perp O_1R_1$である．
よって，$\ell_1 /\!/ O_2P_1$　また，2直線間の距離は，$P_1R_1=O_1R_1-O_1P_1=r_1-(r_1-r_2)=r_2$
したがって，ℓ_1は円O_2の接線でもある．
よって，ℓ_1は2円O_1，O_2の共通接線である．
ℓ_2が共通接線であることも同様に示すことができる．

7 〔作図〕①線分ABの垂直二等分線ℓを引く．
②ABの中点Cを中心とする半径ABの円をかき，ℓとの交点をDとする．
③A，Dを通る直線mを引く．
④Dを中心とする半径ACの円をかき，mとの交点をEとする．
⑤Aを中心とする半径AEの円をかき，ℓとの交点をFとする．
⑥F，Aからの距離がともにABである点Gをとる．
⑦F，Bからの距離がともにABである点Hをとる．
このとき，五角形FGABHが求める正五角形である．



〔証明〕正五角形ABCDEについて図のような関係が成り立ち，
△ACD∽△DFCである．
正五角形の1辺の長さが1のとき，AC=xとおくと，
AC：DF=CD：FCから，$x:1=1:(x-1)$が成り立つ．
これを解くと，$x^2-x-1=0$　$x>0$より，$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
よって，正五角形の1辺の長さと対角線の長さの比は，
$1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$である．
したがって，上の〔作図〕の手順でつくられた五角形で，
AB=2としたときAF=$1+\sqrt{5}$であれば，五角形FGABHはABを1辺とする正五角形であることがいえる．以下これを示す．
③で△ACDは直角三角形なので，$AD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
④より，$AE=AD+DE=\sqrt{5}+1$
⑤より，$AF=AE=1+\sqrt{5}$
したがって，五角形FGABHは求める正五角形である．



4 空間図形

P87

1 (1)平行…なし　垂直…AB，DE，GF　ねじれの位置…AC，AD，DG，CG，DE
(2)平行…BC，FG，EH　垂直…DC，HG，AE，BF，CG，DH　ねじれの位置…EF，HG，BF，CG

2 (1)ABとIJのなす角はABとAFのなす角に等しい．0°≦θ≦90°より，$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$
(2)ABとEJのなす角はABとAHのなす角に等しい．したがって，$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$
(3)DEとHLのなす角はDEとCEのなす角に等しい．したがって，$\boldsymbol{\theta=30^\circ}$

P88

3 (1)△ABCは正三角形，Mは辺BCの中点なので，AM⊥BC
また，△DBCは正三角形，Mは辺BCの中点なので，DM⊥BC
よって，直線BCは平面AMD上の交わる2直線に垂直なので，平面AMDに垂直である．
(2)直線BCは平面AMDに垂直なので，平面AMD上の任意の直線と垂直である．
よって，BC⊥AD

4 点Gは正三角形BCDの重心なので，直線BGとCDの交点をMとすると，GM⊥CD
このとき，Mは辺CDの中点なので，AM⊥CD
よって，平面AGM⊥CDなので，AG⊥CD
また，直線CGとDBの交点をNとすると，GN⊥DB
このとき，Nは辺DBの中点なので，AN⊥DB
よって，平面AGN⊥DBなので，AG⊥DB
したがって，直線AGは平面BCDに垂直である．

5 (1)平面EDJK
(2)直線AB，BDはそれぞれ平面ABHG，平面BHJD上にあり，ともに2平面の交線BHに垂直だから，2平面のなす角は直線ABとBDのなす角に等しい．
よって，$\boldsymbol{\theta=90^\circ}$
(3)直線ABとCDの交点をM，直線GHとJIの交点をNとすると，直線MNは平面ABHGと平面CDJIの交線である．直線AB，CDはそれぞれ平面ABHG，平面CDJI上にあり，ともに2平面の交線MNに垂直であるから，2平面のなす角は直線ABとCDのなす角，すなわち，∠BMCに等しい．
よって，$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

P89

6 $\alpha /\!/ \beta$から，$\ell /\!/ \beta$であり，mはℓを含む平面γとβとの交線である．
したがって，性質1より，$\ell /\!/ m$である．

7 (1)$\ell /\!/ m$のとき，$\ell \nparallel \alpha$であると仮定する．
このとき，$\ell \nparallel \alpha$からℓとαは交わるので，交点をPとする．また，ℓとmによって定まる平面をβとする．このとき，Pはℓ上の点である．また，α上の点でもありβ上の点でもあるから，α，βの交線m上の点でもある．よって，ℓとmは点Pで交わることになり，$\ell /\!/ m$に矛盾する．
したがって，$\ell /\!/ \alpha$である．
(2)ℓを含みmを含まない平面をα，mを含みℓを含まない平面をβとする．
このとき，$\ell /\!/ m$なので，性質2より$\ell /\!/ \beta$である．よって，性質1より，$\ell /\!/ n$である．
また，$\ell /\!/ m$なので性質2より，$m /\!/ \alpha$である．よって，性質1より$m /\!/ n$である．

8 〔②の証明〕OP⊥αなので，OPはα上の直線ℓに垂直である．すなわち，OP⊥ℓ
また，仮定より，PH⊥ℓ　よって，ℓは平面OHPに垂直である．
したがって，ℓは平面OHP上の任意の直線に垂直なので，OH⊥ℓ
〔③の証明〕PH⊥ℓ，OH⊥ℓより，ℓは平面OHPに垂直である．よって，OP⊥ℓ
また，仮定より，OP⊥OH　ℓとOHはα上の平行でない2直線なので，OP⊥α

P90

9 PHは平面ABCに垂直なので，PH⊥BC　Hは△ABCの垂心なので，AH⊥BC
よって，直線BCは平面APHに垂直である．したがって，AP⊥BCである．
〔別解〕AHとBCの交点をKとすると，PH⊥平面ABC，HK⊥BCだから，三垂線の定理より，BC⊥PK
これとAK⊥BCより，平面PAK⊥BCだから，AP⊥BCである．

10 Iは△BCDの内心，Pは内接円と辺BCとの接点なので，IP⊥BC　条件より，AP⊥BC，AI⊥IP
よって，三垂線の定理より，AIは平面BCDに垂直である．

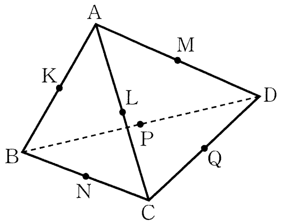
11 (1)正十二面体の12個の面の頂点の数の合計は，5×12＝60
しかし，これらの頂点は3個ずつ重なっているから，60÷3＝**20**
(2)正十二面体の12個の面の辺の数の合計は，5×12＝60
しかし，これらの辺は2個ずつ重なっているから，60÷2＝**30**

12 (1)正二十面体の12個の頂点から新たに5個の頂点ができるので，頂点の数は，12×5＝**60**
(2)正二十面体の30の辺の他に，5×12＝60の辺が増えるので，辺の数は，30＋60＝**90**

13 (1)$v=2n+2$，$e=5n$，$f=3n$
(2)$v-e+f=(2n+2)-5n+3n=2$

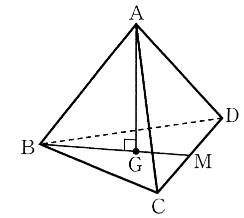
P91

14 四面体をABCDとし，辺AB，AC，AD，BC，BD，CDの中点をそれぞれK，L，M，N，P，Qとする．△BACにおいて，K，Nはそれぞれ辺BA，BCの中点なので，$KN=\frac{1}{2}AC$，KN//AC



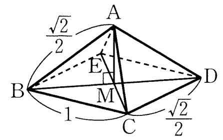
また，△DACにおいて，M，Qはそれぞれ辺DA，DCの中点なので，
$MQ=\frac{1}{2}AC$，MQ//AC　よって，KN＝MQ，KN//MQであることから
四角形KNQMは平行四辺形であり，対角線KQ，MNはそれぞれの中点で交わる．
同様に，$LN=\frac{1}{2}AB$，LN//AB，$MP=\frac{1}{2}AB$，MP//ABであることから四角形LNPMは平行四辺形であり，対角線LP，MNはそれぞれの中点で交わる．
したがって，線分KQ，MN，LPはMNの中点で交わることがいえるから，四面体ABCDにおいて，ねじれの位置にある辺の中点どうしを結ぶ3本の線分は1点で交わる．

15 右の図の正四面体において，頂点Aから△BCDに下ろした垂線の足Gは△BCDの重心なので，直線BGと辺CDの交点をMとすると，MはCDの中点で，BG：GM＝2：1である．△BCDは正三角形なので，



$BG=\frac{2}{3}BM=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$
よって，正四面体の体積は，$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}$

16 (1)1つの頂点を切り落としてできる三角錐の体積は，$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\right)\cdot1=\frac{1}{6}$なので，求める立体の体積は，
$2^3-\frac{1}{6}\times8=8-\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{20}{3}}$
(2)1つの頂点を切り落としたとき，頂点を含む立体の体積をVとする．
この立体は図のような底面が長方形の四角錐である．



BDの中点をMとすると，$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$より，
$BM=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{6}}{4}$　AMは点Aから底面の長方形に下ろした垂線の足なので，
$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$
よって，$V=\frac{1}{3}\cdot\left(1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{12}$　頂点の数は12なので，求める体積は，$\frac{20}{3}-12V=\frac{20}{3}-1=\boldsymbol{\frac{17}{3}}$

P92

17 (1)$4x=2\cdot3$，$x=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$　(2)$\sqrt{10}\cdot3\sqrt{2}=\sqrt{6}x$，$x=\boldsymbol{\sqrt{30}}$
(3)$(4+x)(4-x)=5\cdot2$，$x^2=6$　$x>0$より，$x=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

18 (1)$3\cdot10=4(4+x)$，$x=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$　(2)$x(x+7)=6\cdot10$，$x^2+7x-60=0$　$x>0$より，$x=\mathbf{5}$
(3)$3\cdot8=x^2$　$x>0$より，$x=\boldsymbol{2\sqrt{6}}$

19 三角錐A-BCEと三角錐D-BCEの底面を，それぞれ△ABC，△DBCとみると，2つの底面は同一平面上にあり，頂点Eを共有するから，体積の比は△ABC：△DBCに等しい．
PC＝xとすると，方べきの定理より　$4\cdot(4+5)=x\cdot8$，$x=\frac{9}{2}$　よって，$PC:CD=\frac{9}{2}:\left(8-\frac{9}{2}\right)=9:7$
△PACの面積を$4S$とおくと，PA：AB＝4：5より，△ABC＝$5S$　また，△PBC＝$9S$
PC：CD＝9：7より，△DBC＝$7S$　よって，△ABC：△DBC＝$5S$：$7S$＝5：7
求める体積の比は，**5：7**

P93 〔混合問題〕

1 (1)Mは正三角形ABCの辺BCの中点なので，$AM \perp BC$，$BC /\!/ EF$

よって，$AM \perp EF$　また，BE，CFはともに平面ABCに垂直だから，$AM \perp BE$，$AM \perp CF$

以上より，**EF，BE，CF**

(2)直線AC，BCはそれぞれ平面ACFD，平面BEFC上にあり，ともに2平面の交線CFに垂直であるから，2平面のなす角は直線ACとBCのなす角に等しい．

よって，$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

(3)(1)より，$AM \perp BC$　また，$AD \perp$ 平面ABCより，$AD \perp BC$

よって，直線BCはA，M，Dを通る平面上の交わる2直線に垂直なので，この平面に垂直である．

2 A′を通り，ℓに平行な直線をℓ''とし，ℓ''とβ，γとの交点をそれぞれB″，C″とする．ℓ，ℓ''を含む平面とα，β，γの交線はそれぞれAA′，BB″，CC″である．

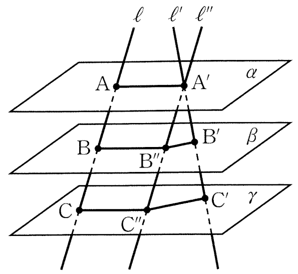
$\alpha /\!/ \beta$より，$AA' /\!/ BB''$，$\beta /\!/ \gamma$より，$BB'' /\!/ CC''$が成り立つ．

したがって，平行線の性質より，$AB : BC = A'B'' : B''C''$である．

同様に，ℓ''，ℓ'を含む平面について考えると，$\beta /\!/ \gamma$より，$B''B' /\!/ C''C'$が成り立つ．

したがって，平行線の性質より，$A'B'' : B''C'' = A'B' : B'C'$である．

以上より，$AB : BC = A'B' : B'C'$である．



3 直線AHは平面BCDに垂直なので，$AH \perp CD$　仮定より，$AB \perp CD$

よって，CDは平面ABHに垂直である．

また，直線BKは平面ACDに垂直なので，$BK \perp CD$　仮定より，$AB \perp CD$

よって，CDは平面ABKに垂直である．

平面ABHと平面ABKはともに直線ABを含みCDに垂直なので，直線AHと直線BKは同一平面上の直線である．

$AH \not\parallel BK$なので，AHとBKは1点で交わる．

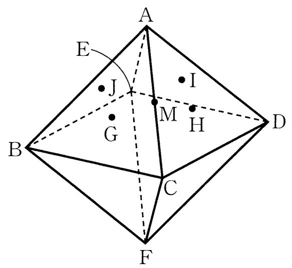
4 (1)正八面体をABCDEFとし，点Aに集まる4つの面の重心を図のようにG，H，I，Jとする．ACの中点をMとすると，

$MG : MB = MH : MD = 1 : 3$より，$GH /\!/ BD$，$GH=\frac{1}{3}BD$

同様にして，$JI /\!/ BD$，$JI=\frac{1}{3}BD$

よって，$GH /\!/ JI$，$GH=JI$より，四角形GHIJは平行四辺形である．

さらに，同様にして，$GJ /\!/ CE$，$GJ=\frac{1}{3}CE$ もいえる．



ここで，四角形BCDEは正方形だから，$BD=CE$，$BD \perp CE$

よって，$GH=GJ$，$GH \perp GJ$となり，四角形GHIJは正方形である．

他の頂点に集まる4つの面の重心についても同様に考えると，できる図形はすべて正方形となることがわかる．したがって，正八面体の各面の重心を結んでできる立体は**立方体**である．

(2)正八面体の1辺の長さを1として考えてよい．このとき，BDとCEの交点をSとおくと，四角錐ABCDEの高さは，$AS=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ なので，正八面体の体積は，$\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3}$

また，$GH=\frac{1}{3}BD=\frac{\sqrt{2}}{3}$　よって，立方体の体積は$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3=\frac{2\sqrt{2}}{27}$　ゆえに，$\frac{2\sqrt{2}}{27}\div\frac{\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$**(倍)**

5 ℓ，mによって定まる平面をα，ℓ上の1点Pとnによって定まる平面をβとする．

αとβの交線をpとすると，$m /\!/ n$であるから，$m /\!/ p$…①，$n /\!/ p$…②が成り立つ．

また，$\ell /\!/ m$で，ℓ，m，pはともに平面α上にあるから，①より，$\ell /\!/ p$

ところが，ℓとpは点Pを共有するから，ℓとpは一致する．

したがって，②より，$\ell /\!/ n$が成り立つ．

6 点Gは△BCDの重心なので，Gは中線BN上の点である．

よって，直線AGは平面ABN上にある．また，直線MNも平面ABN上にある．

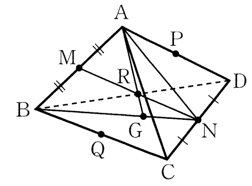
したがって，直線AGと直線MNは交わる．この交点をRとする．

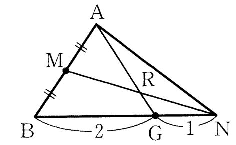
平面ADQで同様にして考えると，直線AGと直線PQが交わることがいえる．

この交点をSとする．次に，平面ABNで，△ABGと直線MNにメネラウスの定理を用いると，$\frac{BN}{NG}\cdot\frac{GR}{RA}\cdot\frac{AM}{MB}=1$，$\frac{3}{1}\cdot\frac{GR}{RA}\cdot\frac{1}{1}=1$，$3GR=RA$ より，点Rは線分AGを3：1に内分する．

同様に，平面ADQで，△ADGと直線PQにメネラウスの定理を用いると，点Sは線分AGを3：1に内分する．

よって，RとSは一致し，直線AG，MN，PQは1点で交わる．



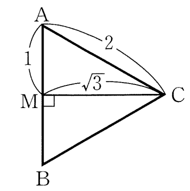


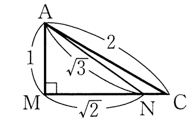
7 (1)正三角形ABCを直線ABを軸として回転させたとき通過する部分の体積を求めればよい．辺ABの中点をMとすると，$MA=1$，$MC=\sqrt{3}$ なので，求める体積は，

$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot 1\times 2=\boldsymbol{2\pi}$

(2)CDの中点をNとすると，直線ABを軸として△AMCを回転させたときの通過する部分の体積から△AMNを回転させたときの通過する部分の体積を引いたものが求める体積である．$MN=\sqrt{AN^2-AM^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$ から，体積は，

$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 1=\pi-\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$





章末問題

P94 〔章末問題A〕

1 △ABCにおいて，$BC /\!/ DE$より，$AE : AC = AD : AB$……①

△ABEにおいて，$BE /\!/ DF$より，$AD : AB = AF : AE$……②

①，②より，$AE : AC = AF : AE$

ゆえに，$AE^2=AC\cdot AF$

2 $\angle BFC=\angle BEC=90^\circ$より，四角形BCEFは円に内接する．

よって，$\angle FEB=\angle FCB$……①

また，$\angle HEC+\angle HDC=180^\circ$より，四角形HDCEは円に内接する．

よって，$\angle HED=\angle HCD$……②

したがって，①，②より，$\angle FEH=\angle HED$となり，EHは∠DEFの二等分線である．

同様にして，FH，DHもそれぞれ∠EFD，∠FDEの二等分線である．

ゆえに，Hは△DEFの内心である．

3 △EBCにチェバの定理を用いると，$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EA}{AB}=1$

△EBCと直線FDにメネラウスの定理を用いると，$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EA}{AB}=1$

よって，$\frac{BG}{GC}=\frac{BF}{FC}$ が成り立つ．

4 点DとGを結ぶ．

四角形BDGEは円に内接するから，$\angle AEG=\angle BDG$

四角形CFGDは円に内接するから，$\angle BDG=\angle CFG$

よって，$\angle AEG=\angle CFG$

ゆえに，四角形AEGFは円に内接する．

5 △ABEと△CDEにおいて，
四角形ABCEは円Oに内接するから，∠BAE＝∠DCE ……①
ADは円Oの接線だから，∠ABE＝∠EAD
BDは円O′の接線だから，∠EAD＝∠CDE
よって，∠ABE＝∠CDE ……②
①，②より，△ABE∽△CDE

6 (1)DHと平面EGHは垂直なので，DH⊥EG
条件より，DI⊥EG
よって，EGは平面DHIに垂直である．
したがって，HI⊥EG

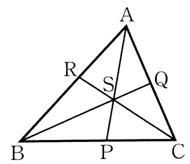
(2)△HEGの面積を2通りに表すと，$\frac{1}{2}\mathrm{EG}\cdot\mathrm{HI}$，$\frac{1}{2}\mathrm{HG}\cdot\mathrm{HE}$ となる．

よって，$\mathrm{EG}\cdot\mathrm{HI}=\mathrm{HG}\cdot\mathrm{HE}$，$\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{HI}=ab$，$\mathrm{HI}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$\mathrm{DI}^2=\mathrm{DH}^2+\mathrm{HI}^2=c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}$，$\mathrm{DI}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}}$

P95 〔章末問題B〕

1 (1)△ABPと直線CRにメネラウスの定理を用いると，



$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$

よって，$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{PS}}$ ……①

また，△ACPと直線BQにメネラウスの定理を用いると，

$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=1$

よって，$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{PS}}$ ……②

ゆえに，①＋②より，

$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}+\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=\left(\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CB}}+\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{CB}}\right)\cdot\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{PS}}=\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SP}}=\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SP}}$

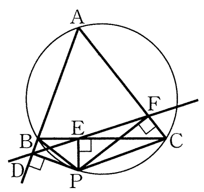
(2)(1)の結果より，$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IP}}=\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}+\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}$

ここで，直線CR，BQはそれぞれ∠C，∠Bの二等分線だから，

$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$，$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$

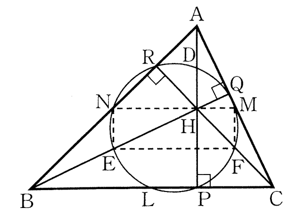
よって，$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IP}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}+\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}=\boldsymbol{\frac{b+c}{a}}$

2 B，E，Cは一直線上にあるから，∠BED＝∠FECが証明できればよい．



∠BEP＝∠BDP＝90°より，B，D，P，Eは同一円周上にある．
よって，∠BED＝∠BPD
同様にして，∠FEC＝∠FPC
また，△BDPと△CFPで，∠BDP＝∠CFP＝90°
さらに，A，B，P，Cは同一円周上の点だから，∠PBD＝∠PCF
よって，∠BPD＝∠CPF
ゆえに，∠BED＝∠FECとなり，3点D，E，Fは一直線上にある．

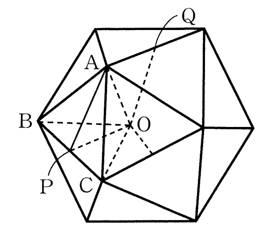
3 中点連結定理より，



$\mathrm{EF}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=\mathrm{NM}$，EF∥BC∥NM
また，NE∥AHだから，∠NEF＝∠APC＝90°
したがって，四角形NEFMは長方形となり，4点N，E，F，MはEMを直径とする同一円周上にある．
同様に，四角形ELMDも長方形となり，4点E，L，M，DもEMを直径とする同一円周上にあるから，6点N，E，L，F，M，Dは同一円周上にある．
また，四角形ELPDにおいて，∠DEL＝∠LPD＝90°より，4点E，L，P，Dは同一円周上にあるから，Pと6点N，E，L，F，M，Dも同一円周上にある．
同様にして，Q，Rも同一円周上にある．
ゆえに，9点L，M，N，P，Q，R，D，E，Fは同一円周上にある．

4 (1)△OAPと△OBPにおいて，
OA＝OB，AP＝BP，OPは共通だから，△OAP≡△OBP ……①
次に，△APEと△BPEにおいて，
AP＝BP，PEは共通，①より，∠APE＝∠BPE
よって，△APE≡△BPE
(2)(1)より，∠AEP＝∠BEPだから，∠BEP＝90°
よって，四角形EDCPは円に内接することになり，4点E，P，C，Dは同一円周上にあるから，方べきの定理より，$\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OP}=\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OC}$ ……①
また，∠OAP＝∠OEA＝90°，∠AOP＝∠EOAより，△OAP∽△OEA
ゆえに，OA：OE＝OP：OA，$\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OP}=\mathrm{OA}^2$ ……②
①，②より，$\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OC}=\mathrm{OA}^2$ が成り立つ．
ここで，OC，OAはともに一定であるから，線分ODの長さは点Pの位置によらず一定である．

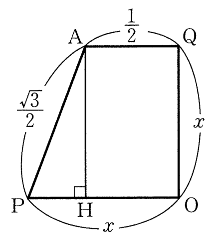
5 (1)図のように，正二十面体に外接する球の中心をOとし，頂点をA，B，C，辺の中点をP，Qとする．正二十面体の対称性からOP⊥OQで，四角形AQOPは台形である．AからOPに下ろした垂線の足をHとし，



$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=x$ とおくと，$\mathrm{PH}^2+\mathrm{AH}^2=\mathrm{AP}^2$ から，

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+x^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，$x^2-x+\frac{1}{4}+x^2=\frac{3}{4}$，$4x^2-2x-1=0$

$x>0$ より，$x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$



よって，$r^2=\mathrm{OA}^2=x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{16}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

(2)$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{OP}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{8}$

よって，三角錐O-ABCの体積Vは，

$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OBC}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{96}=\frac{3+\sqrt{5}}{48}$

したがって，正二十面体の体積は，$20V=20\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{48}=\boldsymbol{\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}}$