

- ⑥ (1) $\triangle ABC$ の面積を S とすると、 $S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$ 、 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ だから、 $\frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}bc \sin \theta$

$$\text{よって、} r = \frac{bc \sin \theta}{a+b+c}$$

- (2) 正弦定理より、 $\frac{a}{\sin \theta} = 2R$ 、 $R = \frac{a}{2 \sin \theta}$ よって、(1) から、 $\frac{r}{R} = \frac{2bc \sin^2 \theta}{a(a+b+c)}$

$$a=1, b=c \text{ のとき、余弦定理より、} \cos \theta = \frac{b^2+b^2-1^2}{2b^2} = \frac{2b^2-1}{2b^2}, \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2b^2-1}{2b^2} \right)^2 = \frac{4b^2-1}{4b^4}$$

$$\text{だから、} \frac{r}{R} = \frac{2b^2 \sin^2 \theta}{2b+1} = \frac{2b^2(4b^2-1)}{(2b+1) \cdot 4b^4} = \frac{2b-1}{2b^2} = -\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{b} = t \text{ とおくと、三角形の辺の条件より、} 1 < 2b \text{ だから、} 0 < \frac{1}{b} < 2, 0 < t < 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{このとき、} \frac{r}{R} = -\frac{1}{2}t^2 + t = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2} \text{ ①より、} t=1 \text{ すなわち } b=1 \text{ のとき、} \frac{r}{R} \text{ の最大値は } \frac{1}{2}$$

- ⑦ 右図の立方体で、半直線 OA 、 OB 、 OC 上にそれぞれ点 P 、 Q 、 R を、 $OP=OQ=OR=t$ となるようにとり、平面 PQR を考えると、この平面は、 O を通る立方体の対角線に垂直である。ここで、 t を大きくしたとき、立方体を平面 PQR で切った切り口の面積の変化を調べる。

$0 < t \leq 1$ のとき、切り口は正三角形で、その面積が最大となるのは $t=1$

すなわち、切り口が正三角形 ABC のときである。1 辺は $\sqrt{2}$ だから、面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

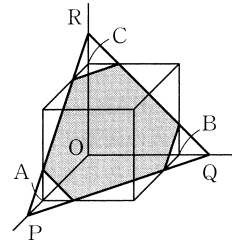
$1 < t < 2$ のとき、切り口は六角形で、その面積は、正三角形 PQR の面積から余った 3 つの三角形の面積の合計を引いたものである。正三角形 PQR の 1 辺は $\sqrt{2}t$ 、余った 3 つの三角形はすべて合同な正三角形で、その 1 辺は $\sqrt{2}(t-1)$ 六角形の面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2}t)^2 \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot \{\sqrt{2}(t-1)\}^2 \sin 60^\circ \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}(t-1)^2 = -\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3}t - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\sqrt{3} \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ となり、} S \text{ は } t = \frac{3}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ をとる。これは } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より大きい。}$$

$t \geq 2$ の範囲では、はじめは切り口は正三角形で、その面積は t が大きくなるにつれて小さくなり、やがては切り口ができなくなる。この範囲で、切り口の面積が最大になることはない。

以上より、切り口の面積の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



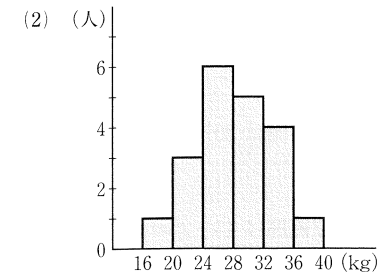
第 5 章 データの分析

1 データの散らばり

P114

1 (1)

階級(kg)	度数(人)
以上 未満	
16 ~ 20	1
20 ~ 24	3
24 ~ 28	6
28 ~ 32	5
32 ~ 36	4
36 ~ 40	1
計	20



$$(3) 3 \div 20 = 0.15$$

- 2 (1) 度数 2 の階級の相対度数が 0.08 だから、度数の合計は、 $2 \div 0.08 = 25$

$$(2) \text{ア} \cdots 5 \div 25 = 0.20 \quad \text{イ} \cdots 25 \times 0.32 = 8 \quad \text{ウ} \cdots 25 - (2 + 5 + 8 + 3) = 7 \quad \text{エ} \cdots 7 \div 25 = 0.28$$

$$\text{オ} \cdots 3 \div 25 = 0.12$$

P115

- 3 (1) データ 1 の 20 個の数値の総和を X とすると、 $X = 1196$ より、 $\bar{x} = \frac{1196}{20} = 59.8 \text{ (g)}$

$$(2) \bar{x} = \frac{1}{20} (53.5 \cdot 2 + 56.5 \cdot 4 + 59.5 \cdot 5 + 62.5 \cdot 6 + 65.5 \cdot 2 + 68.5 \cdot 1) = \frac{1}{20} \cdot 1205 = 60.3 \text{ (g)}$$

- 4 人数の合計が 40 人だから、 $2 + x + y + 9 + 6 = 40$ すなわち、 $x + y = 23 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$\text{平均値が } 3.2 \text{ 点だから、} \frac{1}{40} (1 \cdot 2 + 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 6) = 3.2 \text{ すなわち、} 2x + 3y = 60 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解くと、} x = 9, y = 14$$

P116

- 5 4 人

$$6 (155.3 + 155.9) \div 2 = 155.6 \text{ (cm)}$$

- 7 (1) 4 人

(2)

階級(cm)	147以上~150未満	150~153	153~156	156~159	159~162	162~165	計
度数(人)	1	1	4	1	2	1	10

最頻値 $\cdots 154.5 \text{ cm}$

P117

- 8 (1) $Q_1 = 27, Q_2 = 32, Q_3 = 36$ (2) $Q_1 = 72, Q_2 = 78, Q_3 = 83$ (3) $Q_1 = 21.5, Q_2 = 25.5, Q_3 = 30$

$$(4) Q_1 = 35.5, Q_2 = 41, Q_3 = 48$$

- 9 (1) 男子 範囲は、 $85 - 55 = 30 \text{ (点)}$

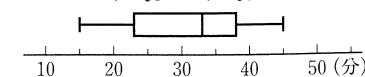
$$Q_1 = 61.5, Q_3 = 78.5 \text{ より、四分位範囲は、} 78.5 - 61.5 = 17 \text{ (点)、四分位偏差は、} \frac{17}{2} = 8.5 \text{ (点)}$$

$$\text{女子 範囲は、} 95 - 60 = 35 \text{ (点)}$$

$$Q_1 = 71, Q_3 = 85.5 \text{ より、四分位範囲は、} 85.5 - 71 = 14.5 \text{ (点)、四分位偏差は、} \frac{14.5}{2} = 7.25 \text{ (点)}$$

(2) 男子の方が女子よりも中央値付近の散らばりの度合いが大きい。

- 10 最小値 15, $Q_1 = 23, Q_2 = 33, Q_3 = 38$, 最大値 45 より、下の図のようになる。



P118

- 11 小さい方から n 番目の値を a_n と表すことにする.
 ① $Q_2 > 160$ だから, $a_{61} \geq Q_2 > 160$ よって, 160 cm 未満の生徒は高々 60 人であるから正しくない.
 ② $Q_1 > 150$ だから, $a_{31} \geq Q_1 > 150$ よって, 150 cm 以下の生徒は高々 30 人である. また, 140 cm 未満の生徒が少なくとも 1 人は存在するから, 140 cm 台の生徒は 29 人以下である. よって, 正しくない.
 ③ $Q_3 > 170$ だから, $a_{91} \geq Q_3 > 170$ よって, 170 cm より高い生徒は少なくとも 30 人はいるから正しい.
 よって, 正しいといえるものは, ③

- 12 (1) A 問題 範囲 $\cdots 50 - 5 = 45$ (分)

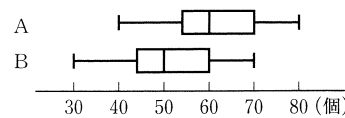
$$Q_1 = 15, Q_3 = 30 \text{ より, 四分位範囲は } 30 - 15 = 15 \text{ (分)} \quad \text{四分位偏差は } \frac{15}{2} = 7.5 \text{ (分)}$$

B 問題 範囲 $\cdots 60 - 10 = 50$ (分)

$$Q_1 = 25, Q_3 = 45 \text{ より, 四分位範囲は } 45 - 25 = 20 \text{ (分)} \quad \text{四分位偏差は } \frac{20}{2} = 10 \text{ (分)}$$

- (2) ① A を 15 分以内で解いた生徒は少なくとも 25 人, B を 25 分未満で解いた生徒は高々 25 人であるから, ○
 ② B では 35 分以上要した生徒が少なくとも 50 人はいるので, ×
 ③ 早い方から 51 番目の生徒は, A では 25 分以上, B では 35 分以上要しているの, ○

- 13 A $\cdots$ 最小値 40, $Q_1 = 54$, $Q_2 = 60$, $Q_3 = 70$, 最大値 80
 B $\cdots$ 最小値 30, $Q_1 = 44$, $Q_2 = 50$, $Q_3 = 60$, 最大値 70
 箱ひげ図は右図. 範囲はどちらも 40 個となっている.



- ① 四分位範囲はどちらも 16 個なので, ウ
 ② A の箱ひげ図の方が個数が多い方に分布しているので, カ

P119

- 14 箱ひげ図の(1), (2), (4)は, 箱が中央にあるので, ヒストグラムは左右対称に近い B, E, F のいずれかになる. このうち, 左右のひげが最も短い(1)のヒストグラムは, 左右に分布が偏っている E, 箱の長さが最も短い(2)のヒストグラムは, データが中央に集まっている F となる. (4)のヒストグラムは B.
 箱が右にある(3), (6)は, 分布が右に偏っている A か D だが, 箱の左のひげの長さにより, (3)が D, (6)が A. 以上から,
 (1)E (2)F (3)D (4)B (5)C (6)A

P120

- 15 平均値を求めると, $\bar{x} = 5$
 分散は, $s^2 = \frac{1}{10} \{ (6-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (10-5)^2 + (1-5)^2 + (6-5)^2 + (0-5)^2 + (9-5)^2 + (3-5)^2 + (6-5)^2 \}$
 $= \frac{1}{10} \cdot 90 = 9$
 よって, 標準偏差は, $s = \sqrt{9} = 3$ (点)

- 16 (証明) $s^2 = \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 \}$
 $= \frac{1}{n} \{ (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n(\bar{x})^2 \}$
 $= \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2\bar{x} \cdot \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (\bar{x})^2$
 $= \bar{x}^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + (\bar{x})^2$
 $= \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$

$$15 \text{ のデータの分散は, } s^2 = \frac{1}{10} (6^2 + 5^2 + 4^2 + 10^2 + 1^2 + 6^2 + 0^2 + 9^2 + 3^2 + 6^2) - 5^2 = \frac{1}{10} \cdot 340 - 25 = 9$$

- 17 平均値を求めると, $\bar{x} = 6$ 分散は, $s^2 = \frac{1}{10} (7^2 + 8^2 + 1^2 + 6^2 + 5^2 + 10^2 + 6^2 + 6^2 + 3^2 + 8^2) - 6^2 = \frac{1}{10} \cdot 420 - 36 = 6$
 よって, 標準偏差は, $s = \sqrt{6} = 2.4$ (点)
 $2.4 < 3$ であるから, 17 のデータの方が 15 のデータより散らばりの度合いが小さい.

P121

- 18 度数分布表から, 右の表 1 を得る.

$$\bar{x} = \frac{340}{20} = 17, \bar{x}^2 = \frac{6500}{20} = 325$$

$$\text{よって, 標準偏差は, } s = \sqrt{325 - 17^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ (分)}$$

- 19 度数分布表から, 右の表 2 を得る.

$$\bar{x} = \frac{340}{20} = 17, \bar{x}^2 = \frac{5880}{20} = 294$$

$$\text{よって, 標準偏差は, } s = \sqrt{294 - 17^2} = \sqrt{5} = 2.2 \text{ (時間)}$$

- 20 平均値は, $\bar{x} = \frac{11 \cdot 8 + 6 \cdot 12}{20} = 8$ (回)

男子のデータ 8 個の 2 乗の和を a , 女子のデータ 12 個の 2 乗の和を b とすると, 分散の値から,

$$\frac{a}{8} - 11^2 = 2, \frac{b}{12} - 6^2 = 3 \text{ より, } a = 984, b = 468$$

$$\text{よって, 20 人のデータの分散は, } s^2 = \frac{984 + 468}{20} - 8^2 = 72.6 - 64 = 8.6$$

表 1

階級値 x (分)	度数 f	xf	x^2f
5	2	10	50
10	2	20	200
15	6	90	1350
20	6	120	2400
25	4	100	2500
計	20	340	6500

表 2

階級値 x (時間)	度数 f	xf	x^2f
12	1	12	144
14	2	28	392
16	8	128	2048
18	4	72	1296
20	5	100	2000
計	20	340	5880

P122

- 21 仮平均を $x_0 = 170$ として, $u = x - x_0$ とすると, 右の表を得る. したがって,

$$\text{平均値は, } \bar{x} = x_0 + \bar{u} = 170 + \frac{1}{5} \cdot (-5) = 169 \text{ (cm)}$$

$$\text{分散は, } s^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = \bar{u}^2 - (\bar{u})^2 = \frac{65}{5} - (-1)^2 = 12$$

$$\text{よって, 標準偏差は, } s = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 2 \times 1.7 = 3.4 \text{ (cm)}$$

- 22 仮平均を $x_0 = 450$, $c = 5$ として, $u = \frac{x - 450}{5}$ とすると,

$$\text{右の表を得る. これより, } \bar{u} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\text{よって, 平均値は, } \bar{x} = x_0 + c\bar{u} = 450 + 5 \cdot 0.4 = 452 \text{ (cm)}$$

$$\text{また, } s_u = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2} = \sqrt{\frac{52}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{25}} = \frac{16}{5} = 3.2 \text{ より, } s_x = cs_u = 5 \cdot 3.2 = 16 \text{ (cm)}$$

x	172	166	173	170	164	計
u	2	-4	3	0	-6	-5
u^2	4	16	9	0	36	65

x	465	425	455	470	445	計
u	3	-5	1	4	-1	2
u^2	9	25	1	16	1	52

- 23 $u = \frac{x - 55}{10}$ として, 右の表を得る.

$$(1) \bar{u} = \frac{24}{60} = 0.4, \bar{x} = x_0 + c\bar{u} = 55 + 10 \cdot 0.4 = 59 \text{ (点)}$$

$$(2) s_u = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2} = \sqrt{\frac{240}{60} - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{96}{25}} = \frac{4\sqrt{6}}{5} = \frac{4 \times 2.45}{5} = 1.96$$

$$s_x = cs_u = 10 \cdot 1.96 = 19.6 \text{ (点)}$$

階級値 x (点)	度数 f	u	uf	u^2f
15	2	-4	-8	32
25	3	-3	-9	27
35	5	-2	-10	20
45	9	-1	-9	9
55	12	0	0	0
65	10	1	10	10
75	10	2	20	40
85	6	3	18	54
95	3	4	12	48
計	60		24	240

P123

- 24 (1) $Q_1 = 14^\circ\text{C}$, $Q_3 = 43^\circ\text{C}$ より, $Q_1 - 1.5 \times (Q_3 - Q_1) = -29.5 (^\circ\text{C})$, $Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1) = 86.5 (^\circ\text{C})$

よって, 外れ値は 88°C

- (2) $Q_1 = 21$ 分, $Q_3 = 33$ 分より, $Q_1 - 1.5 \times (Q_3 - Q_1) = 3$ (分), $Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1) = 51$ (分)

よって, 外れ値は 1 分

$$(3) Q_1=45\text{mL}, Q_3=65\text{mLより}, Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)=15(\text{mL}), Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)=95(\text{mL})$$

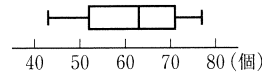
よって、外れ値は**10mL, 100mL**

- 25 (1)中央値や最頻値は外れ値の影響を受けにくい。全データの値を使って計算することになる平均値は外れ値の影響を受けやすい。よって、**平均値**
- (2)(四分位範囲)=(第3四分位数)-(第1四分位数)だから、四分位範囲は外れ値の影響を受けにくい。
- 分散は、各データの値と平均値との差から求めるものであり、平均値が外れ値の影響を受けやすいので、分散も外れ値の影響を受けやすい。よって、**分散**

P124 [混合問題]

- 1 誤りの値を1個含むデータの和は294(cm) 正しいデータによる和は、 $59.6\times 5=298(\text{cm})$
したがって、誤りの値を4増加すると正しい値になる。4増加すると中央値が61cmになるのは58cm
誤りの値は58, 正しい値は62

- 2 (1) $Q_1=52$ 個, $Q_2=63$ 個, $Q_3=71$ 個 箱ひげ図は右図。



- (2)71個

- 3 (1) $\bar{x}=8$ より, $(10-8)^2+(8-8)^2+(7-8)^2+\dots+(5-8)^2=40$

$$\text{よって, } s_x^2 = \frac{40}{10} = 4$$

$$\bar{y}=7\text{より, } (2-7)^2+(11-7)^2+(4-7)^2+\dots+(6-7)^2=90 \text{ よって, } s_y^2 = \frac{90}{10} = 9$$

(2) $s_x=\sqrt{4}=2, s_y=\sqrt{9}=3$ だから、変量 x の方が平均値のまわりの散らばりの度合いが小さい。

- 4 平均値は, $\bar{x} = \frac{22\cdot 20+17\cdot 30}{20+30} = 19(\text{点})$

A組の20人のデータの2乗の和を a , B組の30人のデータの2乗の和を b とすると、

$$\frac{1}{20}a - 22^2 = 6, \frac{1}{30}b - 17^2 = 11 \text{ より, } a=9800, b=9000 \text{ よって, 分散は, } s^2 = \frac{9800+9000}{50} - 19^2 = 15$$

- 5 (1) $u = \frac{x-55}{10}$ として、右の表を作る。

$$\bar{u} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \text{ より, 平均値は, } \bar{x} = 55 + 10 \cdot \frac{1}{5} = 57(\text{点})$$

$$s_u = \sqrt{\frac{200}{50} - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{11}}{5} \text{ より, } s_x = 10 \cdot \frac{3\sqrt{11}}{5} = 6\sqrt{11} \approx 20(\text{点})$$

- (2)54点の偏差値は, $\frac{54-57}{20} \cdot 10 + 50 = 48.5$

$$84\text{点の偏差値は, } \frac{84-57}{20} \cdot 10 + 50 = 63.5$$

- 6 $5+7+9+a+b=5(a+4)$ より, $b=4a-1$

平均値が $a+4$ だから、分散の5倍は、

$$\{5-(a+4)\}^2 + \{7-(a+4)\}^2 + \{9-(a+4)\}^2 + \{a-(a+4)\}^2 + \{(4a-1)-(a+4)\}^2 = 12a^2 - 48a + 76$$

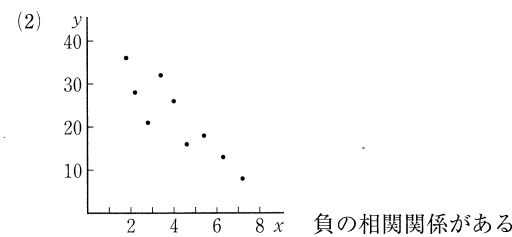
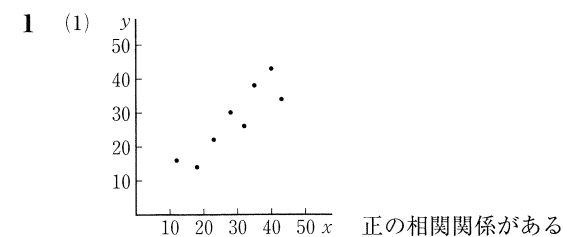
$$= 12(a-2)^2 + 28 \quad a=2 \text{ のとき最小となる。}$$

分散が最小となるのは, $a=2, b=7$ また、そのときの分散の値は $\frac{28}{5} = 5.6$

x	f	u	uf	u^2f
15	2	-4	-8	32
25	4	-3	-12	36
35	5	-2	-10	20
45	5	-1	-5	5
55	10	0	0	0
65	11	1	11	11
75	7	2	14	28
85	4	3	12	36
95	2	4	8	32
計	50		10	200

2 データの相関・仮説検定

P125



P126

- 2 $\bar{x}=171, \bar{y}=58$ より、

右の表を得る。

$$r = \frac{28}{\sqrt{54}\sqrt{24}} = \frac{28}{36} \approx 0.78$$

	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
a	169	59	-2	1	-2	4	1
b	171	56	0	-2	0	0	4
c	175	61	4	3	12	16	9
d	166	55	-5	-3	15	25	9
e	174	59	3	1	3	9	1
計	855	290			28	54	24

- 3 $\bar{x}=10, \bar{y}=12$ より、

$x-\bar{x}$	4	3	1	-1	-5	-2
$y-\bar{y}$	-2	-4	-1	1	2	4

$$r = \frac{4\cdot(-2)+3\cdot(-4)+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+(-5)\cdot 2+(-2)\cdot 4}{\sqrt{4^2+3^2+1^2+(-1)^2+(-5)^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-1)^2+1^2+2^2+4^2}} = -\frac{40}{\sqrt{56}\sqrt{42}} = -\frac{10\sqrt{3}}{21} \approx -0.82$$

- 4 (1) $\bar{x}=10, \bar{y}=8$ より、

$x-\bar{x}$	-3	0	2	-1	4	0	3	-5
$y-\bar{y}$	3	-2	0	-3	0	1	-2	3

$$r = -\frac{27}{\sqrt{64}\sqrt{36}} = -\frac{9}{16} \approx -0.56 \text{ よって, 負の相関関係がある。}$$

- (2) $\bar{x}=9, \bar{y}=11$ より、

$x-\bar{x}$	-2	5	-1	4	-6	-3	1	2
$y-\bar{y}$	-2	4	-1	3	-3	-2	-1	2

$$r = \frac{64}{\sqrt{96}\sqrt{48}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.94 \text{ よって, 強い正の相関関係がある。}$$

- (3) $\bar{x}=7, \bar{y}=6$ より、

$x-\bar{x}$	1	2	-1	-4	3	-1	2	-2
$y-\bar{y}$	-1	4	3	-2	-4	-1	-2	3

$$r = -\frac{9}{\sqrt{40}\sqrt{60}} = -\frac{3\sqrt{6}}{40} \approx -0.18 \text{ よって, ほとんど相関関係がない。}$$

P127

$x(\text{cm})$	$y(\text{kg})$	50以上 ~54未満	54~58	58~62	62~66	66~70
174以上~180未満						1
168 ~174			1	1	4	
162 ~168			2	3	2	
156 ~162	1	1	2			
150 ~156	1		1			

- 6 (1) $a=3$

$$(2)\bar{x} = \frac{1}{20}(1\cdot 0+1\cdot 1+5\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 4+2\cdot 5) = 3$$

$$s_x^2 = \frac{1}{20}\{1\cdot(0-3)^2+1\cdot(1-3)^2+5\cdot(2-3)^2+5\cdot(3-3)^2+6\cdot(4-3)^2+2\cdot(5-3)^2\} = \frac{32}{20} = 1.6$$

$$(3)\bar{y} = \frac{1}{20}(1\cdot 0+5\cdot 1+8\cdot 2+5\cdot 3+1\cdot 4) = 2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{20}\{1\cdot(0-2)^2+5\cdot(1-2)^2+8\cdot(2-2)^2+5\cdot(3-2)^2+1\cdot(4-2)^2\} = \frac{18}{20} = 0.9$$

$$r = \frac{1}{s_x s_y} \cdot \frac{1}{20}[(0-3)\{1\cdot(0-2)\}+(1-3)\{1\cdot(1-2)\}+(2-3)\{2\cdot(1-2)\}+(4-3)\{1\cdot(1-2)+3\cdot(3-2)\}+(5-3)\{1\cdot(3-2)+1\cdot(4-2)\}]$$

$$= \frac{18}{20\sqrt{1.6}\sqrt{0.9}} = 0.75$$

- 7 「AとCは同等である」とすると、Aの方がよい場合とCの方がよい場合が起こる可能性は半々だから、コイン投げに例えて考えることができる。コインを投げ、表が出た場合をCの方が使いやすいとして、例題4のコイン投げの結果を利用する。

(1) $(3+1+0+1+1+0) \div 200 = 0.03 < 0.05$ より、**使いやすくなったと判断できる。**
 (2) $0.03 > 0.01$ より、**使いやすくなったとは判断できない。**

P129 [混合問題]

- 1 ①0.12 ②-0.57 ③-0.92 ④0.82

2 $\bar{x}=15, \bar{y}=14$ より、

$x-\bar{x}$	-1	1	-2	-1	0	3
$y-\bar{y}$	-2	1	-2	-1	1	3

$$r = \frac{(-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{17}{\sqrt{16} \sqrt{20}} = \frac{17\sqrt{5}}{40} \doteq \mathbf{0.95}$$

3 (1) $\bar{x} = \frac{1}{10}(1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 2$

$$s_x^2 = \frac{1}{10}\{1 \cdot (0-2)^2 + 1 \cdot (1-2)^2 + 3 \cdot (3-2)^2\} = \frac{8}{10} = \mathbf{0.8}$$

(2) $\bar{y} = \frac{1}{10}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4) = 3, s_y^2 = \frac{1}{10}\{1 \cdot (1-3)^2 + 2 \cdot (2-3)^2 + 4 \cdot (4-3)^2\} = \frac{10}{10} = 1$

$$r = \frac{1}{s_x s_y} \cdot \frac{1}{10}[(0-2)\{1 \cdot (1-3)\} + (1-2)\{1 \cdot (2-3)\} + (3-2)\{2 \cdot (4-3)\}] = \frac{7}{10 \sqrt{0.8} \sqrt{1}} = \frac{7\sqrt{5}}{20} \doteq \mathbf{0.78}$$

4

$\begin{matrix} x \backslash y \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix}$	6	7	8	9	10
10					1
9	1	2	1		
8	1		1		
7					
6	3				

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(3 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 1 \cdot 10) = 8, \bar{y} = \frac{1}{10}(5 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 10) = 7 \text{ より、}$$

$$r = \frac{(6-8)\{3 \cdot (6-7)\} + (9-8)\{1 \cdot (6-7) + 1 \cdot (8-7)\} + (10-8)\{1 \cdot (10-7)\}}{\sqrt{3 \cdot (6-8)^2 + 4 \cdot (9-8)^2 + 1 \cdot (10-8)^2} \sqrt{5 \cdot (6-7)^2 + 2 \cdot (8-7)^2 + 1 \cdot (10-7)^2}} = \frac{12}{\sqrt{20} \sqrt{16}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \doteq \mathbf{0.67}$$

5 (1) $\bar{x} = 6 + \frac{a}{5}, \bar{y} = 8$

$$s_x^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{5}(9^2 + 7^2 + 5^2 + 9^2 + a^2) - \left(\frac{30+a}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}(a^2 - 15a + 70) \text{ また、 } s_y^2 = \frac{8}{5}$$

$$s_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{5}(9 \cdot 10 + 7 \cdot 9 + 5 \cdot 7 + 9 \cdot 7 + a \cdot 7) - \frac{30+a}{5} \cdot 8 = \frac{11-a}{5}$$

$$\text{したがって、 } r = \frac{11-a}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{25}(a^2 - 15a + 70)} \sqrt{\frac{8}{5}}} = \frac{\sqrt{10}(11-a)}{8\sqrt{a^2 - 15a + 70}}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{8} \text{ だから、 } \frac{\sqrt{10}(11-a)}{8\sqrt{a^2 - 15a + 70}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}, 3\sqrt{a^2 - 15a + 70} = \sqrt{5}(11-a)$$

両辺を平方して整理すると、 $4a^2 - 25a + 25 = 0, (a-5)(4a-5) = 0$ a は整数だから、 **$a=5$**

(2) 修正後は、 $\bar{x}=6, s_x^2 = \frac{16}{5}$ となり、

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{5}} \sqrt{\frac{8}{5}}} \left\{ \frac{1}{5}(9 \cdot 10 + 7 \cdot 9 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 7) - 6 \cdot 8 \right\} = \frac{11\sqrt{2}}{16}$$

修正前と比べると、 $\frac{3\sqrt{2}}{8} < \frac{11\sqrt{2}}{16}$ だから、**相関関係は強くなる。**

章末問題

P130 [章末問題A]

- 1 (1) 10分

(2) 修正前のデータでは、平均値10分、中央値9.5分、分散13である。

修正後のデータでは、平均値10分、中央値10.5分、分散8となる。

したがって、修正後、平均値…等しい 中央値…大きくなる 分散…小さくなる

2 (1) $Q_1=163\text{ cm}, Q_2=167.5\text{ cm}, Q_3=174\text{ cm}$, 四分位範囲…11 cm, 四分位偏差…5.5 cm

(2) $Q_1=41.5\text{ kg}, Q_2=52.5\text{ kg}, Q_3=60.5\text{ kg}$, 四分位範囲…19 kg, 四分位偏差…9.5 kg

- 3 ①, ②, ④

4 (1) $x=12$ のとき $(x-\bar{x})^2=0$ だから、 **$\bar{x}=12$ (分)**

(2) $c=(16-12)^2=16$

$$\bar{x}=12 \text{ より、 } 11+17+a+\cdots+b+5=12 \times 10 \quad a+b=32 \text{ また、 } (a-12)^2=9 \text{ より、 } a=9, 15$$

$$\text{ここで、 } a \leq 20, b \leq 20 \text{ だから、 } a=15, b=17 \text{ したがって、 } d=(17-12)^2=25$$

$$\text{以上から、 } \mathbf{a=15, b=17, c=16, d=25}$$

(3) 分散は、 $\frac{1}{10} \cdot (1+25+9+\cdots+49) = 16$ よって、標準偏差は、 **$\sqrt{16}=4$ (分)**

5 (1) $\bar{x} = \frac{a+27}{5}, \bar{x}^2 = \frac{a^2+201}{5}$ より、 $s_x^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = \frac{4a^2-54a+276}{25}$ $s_x^2 = 2^2 = 4$ だから、 $\frac{4a^2-54a+276}{25} = 4$

$$2a^2 - 27a + 88 = 0, (a-8)(2a-11) = 0 \quad a \text{ は整数だから、 } \mathbf{a=8}$$

(2) $\bar{x}=7, \bar{y}=6$ より、右の表を得る。

$$\text{よって、 } r = \frac{15}{\sqrt{20} \sqrt{20}} = \frac{3}{4} = \mathbf{0.75}$$

$x-\bar{x}$	0	-1	1	3	-3
$y-\bar{y}$	-1	0	3	1	-3

P131 [章末問題B]

- 1 修正前のデータによると、最小値6, $Q_1=10, Q_2=16, Q_3=21$, 最大値26

修正後、平均値が1減少するから、正しいデータは誤りのデータより11小さい。

また、修正後、 Q_3 が変わらずに四分位偏差が1増加することから、修正後の Q_1 は2減少し、8となる。

これを満たし、修正後も最小値、最大値が変わらない誤りのデータは**19**。

このとき、 $Q_2=15$ となり、確かに修正後の箱ひげ図の状態になる。

2 (1) $\bar{u} = \frac{1}{N}(u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_n f_n) = \frac{1}{N}\{(ax_1+b)f_1 + (ax_2+b)f_2 + \cdots + (ax_n+b)f_n\}$

$$= a \cdot \frac{1}{N}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n) + \frac{1}{N} \cdot b(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$$

$$\frac{1}{N}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n) = \bar{x}, f_1 + f_2 + \cdots + f_n = N \text{ だから、 } \bar{u} = a\bar{x} + b$$

(2) $s_u^2 = \frac{1}{N}\{(u_1 - \bar{u})^2 f_1 + \cdots + (u_n - \bar{u})^2 f_n\}$

$$u_1 - \bar{u} = (ax_1+b) - (a\bar{x}+b) = a(x_1 - \bar{x}), \cdots, u_n - \bar{u} = (ax_n+b) - (a\bar{x}+b) = a(x_n - \bar{x}) \text{ だから、}$$

$$s_u^2 = \frac{1}{N}\{a^2(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + \cdots + a^2(x_n - \bar{x})^2 f_n\}$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{N}\{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 f_n\} = a^2 s_x^2$$

$$\text{よって、 } s_u = |a| s_x$$

(3) $r_{zw} = \frac{s_{zw}}{s_z s_w} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(z_1 - \bar{z})(w_1 - \bar{w}) + \cdots + (z_n - \bar{z})(w_n - \bar{w})}{s_z s_w}$

(1) より、 $z_1 - \bar{z} = (ax_1+b) - (a\bar{x}+b) = a(x_1 - \bar{x}), w_1 - \bar{w} = (cy_1+d) - (c\bar{y}+d) = c(y_1 - \bar{y}), \cdots,$

$$z_n - \bar{z} = a(x_n - \bar{x}), w_n - \bar{w} = c(y_n - \bar{y})$$

(2) より、 $s_z = |a| s_x, s_w = |c| s_y$ また、 $ac > 0$ だから、 $|ac| = ac$

$$r_{zw} = \frac{1}{n} \cdot \frac{ac\{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\}}{|a| s_x \cdot |c| s_y} = \frac{ac s_{xy}}{|ac| s_x s_y} = r_{xy}$$

$$(4)y=ax+b \text{ のとき, (2)より, } s_y=|a|s_x \text{ だから, } r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=\frac{s_{xy}}{s_x \cdot |a|s_x}=\frac{s_{xy}}{|a|s_x^2}$$

$$y_1-\bar{y}=a(x_1-\bar{x}), \dots, y_n-\bar{y}=a(x_n-\bar{x}) \text{ だから,}$$

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+\dots+(x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})\}$$

$$=a \cdot \frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2\}$$

$$=as_x^2$$

$$\text{よって, } r=\frac{s_{xy}}{|a|s_x^2}=\frac{as_x^2}{|a|s_x^2}=\frac{a}{|a|}$$

したがって, $a>0$ のとき $r=1$, $a<0$ のとき $r=-1$

$$\textcircled{3} (1)\bar{x}=-3, \bar{y}=0 \text{ で, } \bar{y}=a\bar{x}+b \text{ より, } -3a+b=0 \dots\dots\textcircled{1}$$

$$s_x^2=5 \text{ で, } s_y^2=a^2s_x^2 \text{ より, } s_y^2=5a^2 \dots\dots\textcircled{2}$$

$$s_y^2=\bar{y}^2-(\bar{y})^2 \text{ で, } \bar{y}^2=10, \bar{y}=0 \text{ より, } s_y^2=10 \dots\dots\textcircled{3} \quad \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } a^2=2$$

$$a>0 \text{ より, } a=\sqrt{2} \quad \textcircled{1} \text{ より, } b=3\sqrt{2}$$

(2)平均 3, 標準偏差 3 の 6 個の数を, $x_1, x_2, \dots, x_6$ とし, 残りの 4 個を x_7, x_8, x_9, x_{10} とすると,

$$x_1+\dots+x_{10}=5 \times 10, \quad x_1+\dots+x_6=3 \times 6, \quad \frac{1}{10}(x_1^2+\dots+x_{10}^2)-5^2=15, \quad \frac{1}{6}(x_1^2+\dots+x_6^2)-3^2=3^2$$

$$\text{よって, } x_7+\dots+x_{10}=50-18=32, \quad x_7^2+\dots+x_{10}^2=(15+5^2) \times 10-(3^2+3^2) \times 6=292$$

$$\text{したがって, 残り 4 個の平均は, } \frac{32}{4}=8 \quad \text{標準偏差は, } \sqrt{\frac{292}{4}-8^2}=3$$

$$(3)\text{平均は, } \frac{4 \times 8 + (11+3)}{10}=4.6$$

$$\frac{1}{8}(x_1^2+\dots+x_8^2)-4^2=2^2 \text{ より, } x_1^2+\dots+x_8^2=160 \text{ だから,}$$

$$\text{標準偏差は, } \sqrt{\frac{1}{10}(160+11^2+3^2)-4.6^2}=\sqrt{7.84}=\sqrt{\frac{784}{100}}=\frac{28}{10}=2.8$$

4 変数 y_k の平均値を $\bar{y}$, 変数 z_k の平均値を $\bar{z}$ とする.

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\{2(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)-3(x_1+x_2+\dots+x_n)\}=6, \quad 2\bar{x}^2-3\bar{x}=6 \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\bar{z}=\frac{1}{n}\{4(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)-5(x_1+x_2+\dots+x_n)\}=14, \quad 4\bar{x}^2-5\bar{x}=14 \dots\dots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \bar{x}^2=6, \bar{x}=2$$

$$\text{また, } s_x^2=\bar{x}^2-(\bar{x})^2=6-2^2=2$$

$$\textcircled{5} r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=\frac{1}{n} \cdot \frac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+\dots+(x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})}{s_x s_y}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})}{s_x s_y}+\dots+\frac{(x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})}{s_x s_y}\right\}$$

$$\text{ここで, } u=\frac{x-\bar{x}}{s_x}, \quad v=\frac{y-\bar{y}}{s_y} \text{ とおくと, } r=\frac{1}{n}(u_1v_1+\dots+u_nv_n)$$

$$\text{また, } \frac{1}{n}(u_1^2+\dots+u_n^2)=\frac{1}{s_x^2} \cdot \frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2\}=1 \quad \text{同様に, } \frac{1}{n}(v_1^2+\dots+v_n^2)=1$$

$$\text{これより, } \frac{1}{n}\{(u_1-v_1)^2+\dots+(u_n-v_n)^2\}=\frac{1}{n}(u_1^2+\dots+u_n^2)-2 \cdot \frac{1}{n}(u_1v_1+\dots+u_nv_n)+\frac{1}{n}(v_1^2+\dots+v_n^2) \\ =1-2r+1=2(1-r)$$

左辺 ≥ 0 だから, $2(1-r) \geq 0$ よって, $r \leq 1$

同様に, $\frac{1}{n}\{(u_1+v_1)^2+\dots+(u_n+v_n)^2\}=2(1+r) \geq 0$ より, $r \geq -1$ よって, $|r| \leq 1$

研究と分析

P132 ① ガウスの記号 [] とグラフ

1 (1) $n \leq x < n+1$ のとき, $y=2x+n$ より,

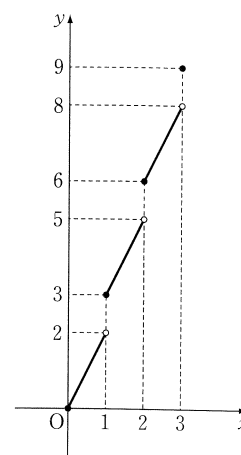
$$0 \leq x < 1 \text{ のとき, } y=2x$$

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき, } y=2x+1$$

$$2 \leq x < 3 \text{ のとき, } y=2x+2$$

$$x=3 \text{ のとき, } y=9$$

グラフは下図



$$(2) -1 \leq x < -\frac{1}{2} \text{ のとき, } y=-1-2=-3$$

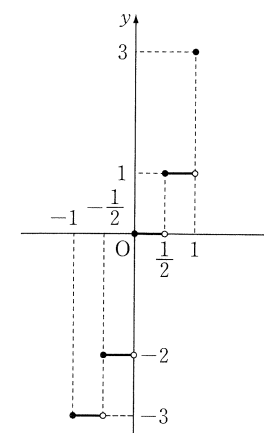
$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ のとき, } y=-1-1=-2$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ のとき, } y=0+0=0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ のとき, } y=0+1=1$$

$$x=1 \text{ のとき, } y=1+2=3$$

グラフは下図



(3) $n \leq x < n+1$ のとき, $y=nx$ より,

$$-2 \leq x < -1 \text{ のとき, } y=-2x$$

$$-1 \leq x < 0 \text{ のとき, } y=-x$$

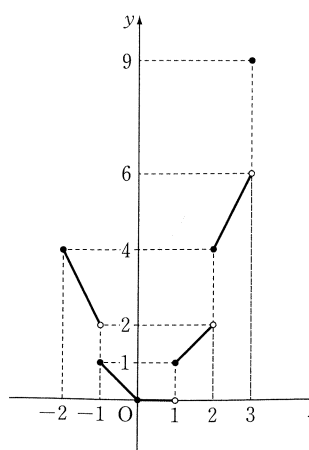
$$0 \leq x < 1 \text{ のとき, } y=0$$

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき, } y=x$$

$$2 \leq x < 3 \text{ のとき, } y=2x$$

$$x=3 \text{ のとき, } y=9$$

グラフは下図



(4) $n \leq x < n+1$ のとき, $y=|x|+n$ より,

$$-3 \leq x < -2 \text{ のとき, } y=-x-3$$

$$-2 \leq x < -1 \text{ のとき, } y=-x-2$$

$$-1 \leq x < 0 \text{ のとき, } y=-x-1$$

$$0 \leq x < 1 \text{ のとき, } y=x$$

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき, } y=x+1$$

$$2 \leq x < 3 \text{ のとき, } y=x+2$$

$$x=3 \text{ のとき, } y=6$$

グラフは下図

