第3章 数学と人間の活動

1 約数と倍数

P96

1 (1) ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18
(2) ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±10, ±12, ±15, ±20, ±30, ±60
(3) 0, ±4, ±8, ±12, ±16, ±20 (4) ±24, ±30, ±36, ±42, ±48

2 (1) a, b は5の倍数であるから，整数 k, l を用いて，$a=5k$, $b=5l$ と表される．このとき，
$2a+3b=2\cdot5k+3\cdot5l=5(2k+3l)$ $2k+3l$ は整数だから，$2a+3b$ は5の倍数である．
(2) a, $a+3b$ は6の倍数であるから，整数 k, l を用いて，$a=6k$, $a+3b=6l$ と表される．このとき，
$3b=6l-a=6l-6k=6(l-k)$, $b=2(l-k)$ $l-k$ は整数だから，b は偶数である．
(3) a, b は3の倍数であるから，整数 k, l を用いて，$a=3k$, $b=3l$ と表される．このとき，
$a^2+ab+b^2=(3k)^2+3k\cdot3l+(3l)^2=9(k^2+kl+l^2)$ k^2+kl+l^2 は整数だから，a^2+ab+b^2 は9の倍数である．

3 (1) 3桁の自然数 n の百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a, b, c とすると，$n=100a+10b+c$
n の百の位の数と一の位の数を入れかえてできる数を m とすると，$m=100c+10b+a$
$n-m=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=99(a-c)$ $a-c$ は整数だから，差は99の倍数である．
(2) 4桁の自然数 n の各位の数をそれぞれ a, b, c, d とすると，$n=1000a+100b+10c+d$
条件より，$(100b+10c+d)-a=7k$ (k は整数) と表すことができる．これより，$100b+10c+d=7k+a$
だから，$n=1000a+7k+a=1001a+7k=7(143a+k)$ $143a+k$ は整数だから，n は7の倍数である．

P97

4 (1) 2，3，6の倍数 (2) 2，4，8の倍数 (3) 3，5の倍数 (4) 3，9の倍数

5 (1) $0\leqq a\leqq9$ かつ $1+5+7+a+6=19+a$ が3の倍数であるような a が□に入る数である．よって，**2, 5, 8**
(2) $0\leqq a\leqq9$, $0\leqq b\leqq9$ かつ $1+3+a+4+7+b+2=17+a+b$ が9の倍数であるような a, b が□に入る数である．$0\leqq a+b\leqq18$ より，$a+b=1$, 10 よって，$(a,\ b)=(9,\ 1)$ のとき，7桁の自然数は最大となり，その数は**1394712**

6 (1) $8a5b2$ が8の倍数かつ9の倍数となるための a, b の条件を求めればよい．
$8a5b2$ が8の倍数であるための条件は，$5b2$ が8で割り切れることなので，$0\leqq b\leqq9$ より，$b=1$, 5, 9
$8a5b2$ が9の倍数になるための条件は，$8+a+5+b+2=15+a+b$ が9の倍数になることで，$0\leqq a+b\leqq18$ より，$a+b=3$, 12 よって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(2,\ 1),\ (3,\ 9),\ (7,\ 5)}$
(2) 3708125の一の位の数は5なので，5で割り切れる．また，各位の数の和は $3+7+0+8+1+2+5=26$ なのでいずれかの位に1を加えることで9で割り切れるようになるが，一の位に1を加えなければ，5かつ9で割り切れる数，すなわち45で割り切れる数になる．

7 (1) 4桁の自然数 n について，千の位，百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a, b, c, d とすると，
$n=1000a+100b+10c+d=(999a+99b+9c)+a+b+c+d=9(111a+11b+c)+a+b+c+d$ と表すことができる．$9(111a+11b+c)$ は9の倍数なので，$a+b+c+d$ が9の倍数ならば n は9の倍数である．
(2) 4桁の自然数 n について，千の位，百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a, b, c, d とすると，
$n=1000a+100b+10c+d=4(250a+25b)+10c+d$ と表すことができる．$4(250a+25b)$ は4の倍数なので，$10c+d$，すなわち n の下2桁が4の倍数ならば n は4の倍数である．

P98

8 (1) $2^3\cdot3$ (2) $2\cdot3\cdot7$ (3) $2^2\cdot3^3$ (4) $2^2\cdot3^2\cdot7$ (5) $5\cdot7\cdot17$ (6) $2\cdot3\cdot5\cdot41$

9 (1) 13 (2) 14 (3) 19 (4) 26 (5) 33 (6) 52

10 $2^a\times27=128\times3^b$ より，$2^a\cdot3^3=2^7\cdot3^b$ よって，$\boldsymbol{a=7,\ b=3}$

11 (1) $378=2\cdot3^3\cdot7$ より，N が自然数になるような最小の自然数 n は，$n=2\cdot3\cdot7=\mathbf{42}$
このとき，$N=\sqrt{378n}=\sqrt{2^2\cdot3^4\cdot7^2}=\sqrt{(2\cdot3^2\cdot7)^2}=2\cdot3^2\cdot7=\mathbf{126}$
(2) $120=2^3\cdot3\cdot5$ より，$n=2\cdot3\cdot5=\mathbf{30}$, $n=2\cdot3\cdot5\times2^2=\mathbf{120}$, $n=2\cdot3\cdot5\times3^2=\mathbf{270}$
(3) $540=2^2\cdot3^3\cdot5$ より，$\sqrt{\dfrac{540}{n}}$ が自然数になるような自然数 n は，$n=3\cdot5$, $2^2\cdot3\cdot5$, $3^3\cdot5$, $2^2\cdot3^3\cdot5$ の4通り．
よって，$\boldsymbol{n=15,\ 60,\ 135,\ 540}$
(4) $252=2^2\cdot3^2\cdot7$ より，最小の n は，$n=2\cdot3\cdot7^2=\mathbf{294}$

12 (1) $63=3^2\cdot7$ より，$\sqrt{63n}$ が整数となる n を小さい順に書くと，$n=7$, $2^2\cdot7$, $3^2\cdot7$, $4^2\cdot7$, $5^2\cdot7$, ……より，
$n=7$, 28, 63, 112, 175, …… したがって，$\sqrt{n+32}$ が整数になるような最小の自然数 n は，$\boldsymbol{n=112}$
(2) $2160=2^4\cdot3^3\cdot5$ より，$\sqrt{2160(175-2n)}$ が自然数になるための条件は，$1\leqq175-2n\leqq173$ から，
$175-2n=3\cdot5$, $2^2\cdot3\cdot5$, $3^3\cdot5$ より，$175-2n=15$, 60, 135 n は自然数なので，$\boldsymbol{n=20,\ 80}$

P99

13 (1) 1, 3, 5, 9, 15, 45 (2) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216
(3) 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84
(4) 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 81, 90, 135, 162, 270, 405, 810

14 (1) $n+9$ は10以上の80の正の約数である．$80=2^4\cdot5$ より，$n+9=10$, 16, 20, 40, 80
$\boldsymbol{n=1,\ 7,\ 11,\ 31,\ 71}$
(2) $\dfrac{4n-3}{n-3}=\dfrac{4(n-3)+9}{n-3}=4+\dfrac{9}{n-3}$ $\dfrac{9}{n-3}$ が整数であるための n の条件は $n-3=\pm1$, ±3, ±9
n は自然数なので，$n=2$, 4, 6, 12 このうち，$\dfrac{9}{n-3}$ が -3 以上の整数になるものは，$\boldsymbol{n=4,\ 6,\ 12}$

15 (1) $108=2^2\cdot3^3$ より，正の約数の個数は $3\cdot4=$ **12 (個)** 正の約数の総和は，$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)=7\cdot40=\mathbf{280}$
(2) $315=3^2\cdot5\cdot7$ より，正の約数の個数は $3\cdot2\cdot2=$ **12 (個)**
正の約数の総和は，$(1+3+3^2)(1+5)(1+7)=13\cdot6\cdot8=\mathbf{624}$
(3) $990=2\cdot3^2\cdot5\cdot11$ より，正の約数の個数は $2\cdot3\cdot2\cdot2=$ **24 (個)**
正の約数の総和は，$(1+2)(1+3+3^2)(1+5)(1+11)=3\cdot13\cdot6\cdot12=\mathbf{2808}$

16 $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ より，$S_1=\{1^2+2^2+(2^2)^2+(2^3)^2\}\{1^2+3^2+(3^2)^2\}(1^2+5^2)=85\cdot91\cdot26=\mathbf{201110}$
$S_2=\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{15}{8}\cdot\dfrac{13}{9}\cdot\dfrac{6}{5}=\boldsymbol{\dfrac{13}{4}}$

17 $60=2^2\cdot3\cdot5$ より，60の正の約数の個数は $3\cdot2\cdot2=12$ (個) よって，y 座標が整数になるような正の整数 x は12個あるので，$x<0$ のときを含めて，$12\times2=$ **24 (個)**

18 (1) x の値を決めると y の値も決まるから，$xy=45$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ の個数は45の正の約数の個数に等しい．$45=3^2\cdot5$ より，$3\cdot2=$ **6 (個)**
(2) $x=1$ のとき，$yz=45$ ……① y の値を決めると z の値も決まるから，①を満たす自然数の組 $(y,\ z)$ の個数は45の正の約数の個数に等しく6個である．同様に考えて，$x=3$ のとき，$yz=3\cdot5$ より4個，$x=5$ のとき，$yz=3^2$ より3個，$x=3^2$ のとき，$yz=5$ より2個，$x=3\cdot5$ のとき，$yz=3$ より2個，$x=3^2\cdot5$ のとき，$yz=1$ より1個．よって，$6+4+3+2\times2+1=$ **18 (個)**

P100

19 (1) 最大公約数…84，最小公倍数…1260 (2) 最大公約数…56，最小公倍数…2352
(3) 最大公約数…30，最小公倍数…1260 (4) 最大公約数…63，最小公倍数…1890

20 (1) 35と50の最大公約数は5，18と63の最小公倍数は126なので，求める数は $\boldsymbol{\dfrac{126}{5}}$
(2) 135と225の最大公約数は45，8と28の最小公倍数は56なので，求める数は $\boldsymbol{\dfrac{56}{45}}$
(3) 392と588と980の最大公約数は196，15と55と33の最小公倍数は165なので，求める数は $\boldsymbol{\dfrac{165}{196}}$

21 $1861-13=1848$, $3093-13=3080$, $1333-13=1320$ を割り切る最大の自然数を求めればよい．それは，これら3数の最大公約数で，$1848=2^3\cdot3\cdot7\cdot11$, $3080=2^3\cdot5\cdot7\cdot11$, $1320=2^3\cdot3\cdot5\cdot11$ から，$2^3\cdot11=\mathbf{88}$

22 (1) 最も大きいタイルの1辺の長さは，床の縦の長さと横の長さの最大公約数である．$165=3\cdot5\cdot11$,
$360=2^3\cdot3^2\cdot5$ であるから，最大公約数は $3\cdot5=15$ よって，$\boldsymbol{x=15}$
(2) $6=2\cdot3$, $14=2\cdot7$, $20=2^2\cdot5$ より，3数の最小公倍数は $2^2\cdot3\cdot5\cdot7=420$ よって，次に3つのホームから電車が同時に発車する時刻は，$420\div60=7$ (時間後) の**午後7時**である．

P101

23 200と4400を素因数分解すると，$200=2^3\cdot5^2$，$4400=2^4\cdot5^2\cdot11$　よって，200との最小公倍数が4400である自然数は $2^4\cdot5^\alpha\cdot11$ $(\alpha=0,\ 1,\ 2)$ と表される．したがって，$n=2^4\cdot5^0\cdot11,\ 2^4\cdot5^1\cdot11,\ 2^4\cdot5^2\cdot11$
すなわち，$\boldsymbol{n=176,\ 880,\ 4400}$

24 540と2700を素因数分解すると，$540=2^2\cdot3^3\cdot5$，$2700=2^2\cdot3^3\cdot5^2$　よって，540との最小公倍数が2700である自然数は $2^\alpha\cdot3^\beta\cdot5^2$ $(\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ と表される．よって，n の個数は $3\cdot4=$ **12(個)**

25 1から800までの自然数のうち，5の倍数の個数は，$800=5\cdot160$ より160個，5^2 の倍数の個数は $800=5^2\cdot32$ より32個，5^3 の倍数の個数は $800=5^3\cdot6+50$ より6個，5^4 の倍数の個数は $800=5^4\cdot1+175$ より1個．よって，800! を素因数分解したときの素因数5の個数は $160+32+6+1=199$ (個)
したがって，800! の末尾に連続して並ぶ0の個数は**199個**.

26 1から60までの自然数のうち，3の倍数の個数は20個，3^2 の倍数の個数は6個，3^3 の倍数の個数は2個なので，60! を素因数分解したときの素因数3の個数は $20+6+2=28$ (個)　また，1から60までの自然数のうち，5の倍数の個数は12個，5^2 の倍数の個数は2個なので，60! を素因数分解したときの素因数5の個数は
$12+2=14$ (個)
したがって，$\dfrac{60!}{3^m\cdot5^n}$ が整数となるような0以上の整数の組 $(m,\ n)$ の個数は $(28+1)(14+1)=$ **435(個)**

27 ${}_{1000}\mathrm{C}_{400}=\dfrac{1000!}{400!\,600!}$ より，400!，600!，1000! のそれぞれを素因数分解したときの素因数5の個数は，
$80+16+3=99$ (個)，$120+24+4=148$ (個)，$200+40+8+1=249$ (個) なので，${}_{1000}\mathrm{C}_{400}$ に含まれる素因数5の個数は $249-99-148=2$ (個)　したがって，末尾に並ぶ0の個数は**2個**.

P102

28 $a+1$，$a+3$ は自然数 k，l を用いて $a+1=4k$，$a+3=9l$ と表される．このとき，
$a+21=(a+1)+20=4k+20=4(k+5)$，$a+21=(a+3)+18=9l+18=9(l+2)$ より，$4(k+5)=9(l+2)$
$4(k+5)$ は9の倍数であるが，4と9は互いに素であるから，$k+5$ は9の倍数である．よって，自然数 m を用いて $k+5=9m$ と表されるから，$a+21=4(k+5)=4\cdot9m=36m$　したがって，$a+21$ は36の倍数である．

29 (1) a と b が互いに素であるとき，$a+2b$ と $3a+5b$ が互いに素でないと仮定する．このとき，自然数 k，l と2以上の素数 g が存在して，$a+2b=gk$ ……①，$3a+5b=gl$ ……② と表すことができる．このとき，①×3−② から，$b=3gk-gl=g(3k-l)$　また，②×2−①×5 から，$a=2gl-5gk=g(2l-5k)$　a，b，g は自然数なので，$3k-l$，$2l-5k$ は自然数である．よって，a と b がともに g の倍数となり，a と b が互いに素であることに矛盾する．よって，a と b が互いに素ならば $a+2b$ と $3a+5b$ も互いに素である．
(2) a と b が互いに素であるとき，$a+b$ と ab が互いに素でないと仮定する．このとき，自然数 k，l と素数 g が存在して，$a+b=gk$ ……①，$ab=gl$ ……② と表すことができる．①×a−② から，
$a^2=agk-gl=g(ak-l)$　a^2 が g の倍数なので a も g の倍数である．そこで，自然数 m を用いて $a=gm$ と表すと，①より，$b=gk-a=gk-gm=g(k-m)$ となり，b は g の倍数である．これは a と b が互いに素であることに矛盾する．よって，a と b が互いに素ならば $a+b$ と ab も互いに素である．

30 (1) 最大公約数が24であるから，$a=24a'$，$b=24b'$ (a'，b' は互いに素な自然数で $a'<b'$) と表せる．
このとき，a，b の最小公倍数は $24a'b'$ であるから，$24a'b'=720$，$a'b'=30$
よって，$(a',\ b')=(1,\ 30),\ (2,\ 15),\ (3,\ 10),\ (5,\ 6)$
したがって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(24,\ 720),\ (48,\ 360),\ (72,\ 240),\ (120,\ 144)}$
(2) 最大公約数が28であるから，$a=28a'$，$b=28b'$ (a'，b' は互いに素な自然数で $a'<b'$) と表せる．
このとき，a，b の最小公倍数は $28a'b'$ であるから，$28a'b'=2100$，$a'b'=75$
よって，$(a',\ b')=(1,\ 75),\ (3,\ 25)$　したがって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(28,\ 2100),\ (84,\ 700)}$

31 (1) 最大公約数が72であるから，$a=72a'$，$b=72b'$ (a'，b' は互いに素な自然数で $a'<b'$) と表せる．
このとき，和が648であるから，$72a'+72b'=648$，$a'+b'=9$
よって，$(a',\ b')=(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5)$
a，b はともに3桁の自然数なので，$\boldsymbol{(a,\ b)=(144,\ 504),\ (288,\ 360)}$
(2) 最大公約数が91であるから，$a=91a'$，$b=91b'$ (a'，b' は互いに素な自然数で $a'<b'$) と表せる．
このとき，差が455であるから，$91b'-91a'=455$，$b'-a'=5$　a，b はともに3桁の自然数なので，
$(a',\ b')=(2,\ 7),\ (3,\ 8),\ (4,\ 9)$　したがって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(182,\ 637),\ (273,\ 728),\ (364,\ 819)}$

P103

32 (1) a と b の最大公約数を g (g は自然数) とおくと，$a=ga'$，$b=gb'$ (a'，b' は互いに素な自然数で $a'<b'$) と表される．このとき，a，b の積が864であるから，$g^2a'b'=864$ ……①　また，最小公倍数が144であることから，$ga'\cdot gb'=g\cdot144$ ……②　①，②から，$g=6$　よって，$a'b'=24$ より，$(a',\ b')=(1,\ 24),\ (3,\ 8)$
したがって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(6,\ 144),\ (18,\ 48)}$
(2) a と b の最大公約数を g (g は自然数) とおくと，$a=ga'$，$b=gb'$ (a'，b' は互いに素な自然数で $a'<b'$) と表される．このとき，a，b の積が4116であるから，$g^2a'b'=4116$ ……①　また，最小公倍数が588であることから，$ga'\cdot gb'=g\cdot588$ ……②　①，②から，$g=7$
よって，$a'b'=84$ より，$(a',\ b')=(1,\ 84),\ (3,\ 28),\ (4,\ 21),\ (7,\ 12)$
したがって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(7,\ 588),\ (21,\ 196),\ (28,\ 147),\ (49,\ 84)}$

33 a と b の最大公約数を g (g は自然数) とおくと，$a=ga'$，$b=gb'$ (a'，b' は互いに素な自然数で $a'<b'$) と表される．このとき，a，b の和が528であるから，$g(a'+b')=528=2^4\cdot3\cdot11$ ……①　また，最小公倍数が5797であることから，$ga'b'=5797=11\cdot17\cdot31$ ……②　ここで，$a'+b'$ と $a'b'$ は互いに素であるから，$g=11$ であり，①，②より，$a'+b'=48$，$a'b'=17\cdot31$　これらを満たすのは，$(a',\ b')=(17,\ 31)$
したがって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(187,\ 341)}$

34 a と b の最大公約数を g (g は自然数) とおくと，$a=ga'$，$b=gb'$ (a'，b' は互いに素な自然数で $a'<b'$) と表される．このとき，$a+b=5g$ から，$(a'+b')g=5g$，$a'+b'=5$ ……①　また，$6ab=(ga'b')^2$，$ab=g^2a'b'$ から，$6g^2a'b'=g^2a'^2b'^2$，$a'b'=6$ ……② が成り立つ．①，②より，$(a',\ b')=(2,\ 3)$
したがって，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{2g}{3g}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

35 a，b は k，l を整数として $a=5k+3$，$b=5l+4$ のように表される．
(1) $a+b=(5k+3)+(5l+4)=5(k+l+1)+2$ より，余りは**2**である．
(2) $2a+3b=2(5k+3)+3(5l+4)=10k+15l+18=5(2k+3l+3)+3$ より，余りは**3**である．
(3) $ab=(5k+3)(5l+4)=25kl+20k+15l+12=5(5kl+4k+3l+2)+2$ より，余りは**2**である．

36 条件から，k，l を整数として $a=3k+2$，$2a^2-b=3l+1$ のように表される．このとき，
$b=2a^2-(3l+1)=2(3k+2)^2-3l-1=2(9k^2+12k+4)-3l-1=18k^2+24k-3l+7=3(6k^2+8k-l+2)+1$
よって，b を3で割ったときの余りは**1**である．

P104

37 (1) 奇数は整数 n を用いて，$2n+1$ と表すことができる．
このとき，$(2n+1)^2-1=(4n^2+4n+1)-1=4n^2+4n=4n(n+1)$
$n(n+1)$ は連続する2つの整数の積なので2の倍数である．
よって，$4n(n+1)$ は8の倍数であり，奇数の平方から1を引いた数は8で割り切れる．
(2) $n^2+3n=n^2+n+2n=n(n+1)+2n$
$n(n+1)$ は連続する2つの整数の積なので2の倍数である．
よって，n が整数であるとき，n^2+3n は2で割り切れる．

38 $n^3+5n=n^3-n+6n=n(n^2-1)+6n=(n-1)n(n+1)+6n$　$(n-1)n(n+1)$ は連続する3つの整数の積なので6の倍数．よって，n が整数であるとき，n^3+5n は6で割り切れる．

39 (1) すべての整数 n は4で割った余りで，$n=4k$，$n=4k+1$，$n=4k+2$，$n=4k+3$ (k は整数) のいずれかの形で表される．
[1] $n=4k$ のとき，$n^2=(4k)^2=16k^2=4\cdot4k^2$
[2] $n=4k+1$ のとき，$n^2=(4k+1)^2=16k^2+8k+1=4(4k^2+2k)+1$
[3] $n=4k+2$ のとき，$n^2=(4k+2)^2=16k^2+16k+4=4(4k^2+4k+1)$
[4] $n=4k+3$ のとき，$n^2=(4k+3)^2=16k^2+24k+9=4(4k^2+6k+2)+1$
よって，n^2 を4で割ったときの余りは0または1である．
〔別解〕すべての整数 n は2で割った余りで，$n=2k$，$n=2k+1$ (k は整数) のいずれかの形で表される．
[1] $n=2k$ のとき，$n^2=(2k)^2=4k^2$
[2] $n=2k+1$ のとき，$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$
よって，n^2 を4で割ったときの余りは0または1である．

(2)すべての整数nは5で割った余りで，$n=5k$，$n=5k+1$，$n=5k+2$，$n=5k+3$，$n=5k+4$（kは整数）のいずれかの形で表される．

[1]$n=5k$のとき，$n^2-2n=(5k)^2-2\cdot5k=25k^2-10k=5(5k^2-2k)$

[2]$n=5k+1$のとき，$n^2-2n=(5k+1)^2-2(5k+1)=25k^2+10k+1-10k-2=25k^2-1=5(5k^2-1)+4$

[3]$n=5k+2$のとき，$n^2-2n=(5k+2)^2-2(5k+2)=25k^2+20k+4-10k-4=25k^2+10k=5(5k^2+2k)$

[4]$n=5k+3$のとき，$n^2-2n=(5k+3)^2-2(5k+3)=25k^2+30k+9-10k-6=25k^2+20k+3=5(5k^2+4k)+3$

[5]$n=5k+4$のとき，

$n^2-2n=(5k+4)^2-2(5k+4)=25k^2+40k+16-10k-8=25k^2+30k+8=5(5k^2+6k+1)+3$

よって，n^2-2nを5で割ったときの余りは0または3または4である．

40 すべての整数nは3で割った余りで，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$（kは整数）のいずれかの形で表される．

[1]$n=3k$のとき，$n^2-n-1=(3k)^2-3k-1=9k^2-3k-1=3(3k^2-k-1)+2$

[2]$n=3k+1$のとき，$n^2-n-1=(3k+1)^2-(3k+1)-1=9k^2+6k+1-3k-1-1=3(3k^2+k-1)+2$

[3]$n=3k+2$のとき，$n^2-n-1=(3k+2)^2-(3k+2)-1=9k^2+12k+4-3k-2-1=3(3k^2+3k)+1$

よって，n^2-n-1を3で割ったときの余りは1または2なので，n^2-n-1は3で割り切れない．

41 (1)すべての整数nは3で割った余りで，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$（kは整数）のいずれかの形で表される．

[1]$n=3k$のとき，$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot3k^2$

[2]$n=3k+1$のとき，$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

[3]$n=3k+2$のとき，$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

よって，n^2を3で割ったときの余りは0または1であって，2にはならない．

(2)$m^2+n^2=l^2$ ……① が成り立つとき，m，nがともに3で割り切れないと仮定する．

ここで，(1)の[2]，[3]の結果から，m^2，n^2を3で割った余りはそれぞれ1で，整数a，bを用いて，

$m^2=3a+1$，$n^2=3b+1$と表すことができる．

このとき，$m^2+n^2=(3a+1)+(3b+1)=3(a+b)+2$より，$m^2+n^2$を3で割った余りは2である．

ところが，(1)の結果からl^2を3で割ったときの余りは2にならない．これは①に矛盾する．

したがって，$m^2+n^2=l^2$が成り立つならば，m，nの少なくとも一方は3で割り切れる．

P105

42 (1)$16=5\cdot3+1$より，16^{50}を5で割った余りは，$1^{50}=$**1**

(2)$2^{80}=4^{40}$で，$4=3\cdot1+1$より，2^{80}を3で割った余りは，$1^{40}=$**1**

(3)$3^{50}=3^2\cdot3^{48}=9\cdot81^{12}$　$81=10\cdot8+1$より，81^{12}を10で割った余りは，$1^{12}=1$である．

よって，3^{50}を10で割った余りは，$9\cdot1=$**9**

(4)$100=7\cdot14+2$より，100^{100}を7で割った余りは，2^{100}を7で割った余りに等しい．

$2^{100}=2\cdot2^{99}=2\cdot8^{33}$　$8=7\cdot1+1$より，8^{33}を7で割った余りは，$1^{33}=1$なので，2^{100}を7で割った余りは，$2\cdot1=2$

したがって，100^{100}を7で割った余りは**2**

43 $2^{202}=4\cdot2^{200}=4\cdot2^{8\cdot25}=4\cdot16^{2\cdot25}$　$16^2=(17-1)^2=17^2-2\cdot17+1$より，$16^2$を17で割った余りは1である．

よって，求める余りは，$4\cdot1^{25}=$**4**

44 (1)$2^3-3\cdot2=2$より，余りは**2**　(2)$3^4+2\cdot3^2=99=7\cdot14+1$より，余りは**1**

45 (1)nを3で割った余りが1のとき，$1^4+1^2=2$より，余りは2

nを3で割った余りが2のとき，$2^4+2^2=20=3\cdot6+2$より，余りは2

よって，nが3で割り切れないとき，n^4+n^2は3で割り切れない．

(2)nを5で割った余りが0のとき，$0^3+4\cdot0+2=2$より，余りは2

nを5で割った余りが1のとき，$1^3+4\cdot1+2=7=5\cdot1+2$より，余りは2

nを5で割った余りが2のとき，$2^3+4\cdot2+2=18=5\cdot3+3$より，余りは3

nを5で割った余りが3のとき，$3^3+4\cdot3+2=41=5\cdot8+1$より，余りは1

nを5で割った余りが4のとき，$4^3+4\cdot4+2=82=5\cdot16+2$より，余りは2

よって，n^3+4n+2は5で割り切れない．

46 $1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9=7\cdot1+2$，$4^2=16=7\cdot2+2$，$5^2=25=7\cdot3+4$，$6^2=36=7\cdot5+1$より，nが7の倍数でないとき，n^2を7で割った余りは，1，2，4のいずれかであるから，結局，$n^6-1=(n^2)^3-1$を7で割った余りは，$1^3-1=0$，$2^3-1=7$，$4^3-1=7\cdot9$より，いずれの場合も0となる．

よって，nが7の倍数でないとき，n^6-1は7で割り切れる．

47 a，bの一方が3で割り切れ，他方が3で割り切れないとする．

(i)aが3で割り切れ，bが3で割り切れないとき，$0^2+2\cdot1^2=2$，$0^2+2\cdot2^2=8=3\cdot2+2$より，$a^2+2b^2$を3で割った余りは2となり，$a^2+2b^2$が3で割り切れることに矛盾する．

(ii)aが3で割り切れず，bが3で割り切れるとき，$1^2+2\cdot0^2=1$，$2^2+2\cdot0^2=4=3\cdot1+1$より，$a^2+2b^2$を3で割った余りは1となり，$a^2+2b^2$が3で割り切れることに矛盾する．

(i)，(ii)より，a^2+2b^2が3で割り切れるとき，a，bはともに3で割り切れるか，ともに3で割り切れないかのいずれかである．

P106 〔混合問題〕

1 4桁の自然数nについて，千の位，百の位，十の位，一の位の数をそれぞれa，b，c，dとすると，

$(10a+b)+(10c+d)=11k$（kは自然数）であることから，$10c+d=11k-10a-b$が成り立つ．

よって，$n=1000a+100b+10c+d=1000a+100b+11k-10a-b=990a+99b+11k=11(90a+9b+k)$

$90a+9b+k$は整数だから，nは11の倍数である．

2 $31500=2^2\cdot3^2\cdot5^3\cdot7$より，偶数の約数の総和は，$(2+2^2)(1+3+3^2)(1+5+5^2+5^3)(1+7)=6\cdot13\cdot156\cdot8=$**97344**

3 $77=7\cdot11$から，77と互いに素な自然数は，7の倍数でなくかつ11の倍数でもない数である．77以下の自然数の集合をU，Uの部分集合で7の倍数の集合をA，11の倍数の集合をBとすると，求める自然数の個数は，

$n(\overline{A}\cap\overline{B})$である．$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$，$n(U)=77$，

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=11+7-1=17$なので，$n(\overline{A}\cap\overline{B})=77-17=$**60（個）**

4 最大公約数が12であるから，$a=12a'$，$b=12b'$，$c=12c'$（a'，b'，c'の最大公約数は1）と表せる．

このとき，a'，b'，c'の最小公倍数は$216\div12=18=2\cdot3^2$である．$a<b<c$より$a'<b'<c'$である．

最大の数c'は3^2を因数にもつので，$c'=9$または$c'=18$である．

$c'=9$のとき，$(a',\ b')=(1,\ 2)$，$(1,\ 6)$，$(2,\ 3)$，$(2,\ 6)$の4通り．

$c'=18$のとき，$(a',\ b')=(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 6)$，$(1,\ 9)$，$(2,\ 3)$，$(2,\ 9)$の6通り．

よって，自然数の組$(a,\ b,\ c)$は**10個**ある．

5 n^2と$2n+1$が互いに素でないと仮定する．このとき，自然数k，lと2以上の自然数gが存在して，

$n^2=gk$ ……①，$2n+1=gl$ ……② と表すことができる．②から，$2n=gl-1$，$4n^2=(gl-1)^2$

①を代入して整理すると，$4gk=g^2l^2-2gl+1$，$4gk+2gl=g^2l^2+1$，$g(4k+2l)=g\cdot gl^2+1$

左辺はgの倍数，右辺はgで割って1余る数だから矛盾する．よって，n^2と$2n+1$は互いに素である．

6 $n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$

$n\geqq2$のとき，$n^2+2n+2=(n+1)^2+1\geqq3^2+1=10$，$n^2-2n+2=(n-1)^2+1\geqq1^2+1=2$

よって，n^4+4は合成数であるから，素数にならない．

7 $3^l\cdot5^m\cdot7^n$のすべての正の約数の総和をSとおくと，

$S=(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^l)(1+5+5^2+\cdots\cdots+5^m)(1+7+7^2+\cdots\cdots+7^n)$

l，m，nがすべて偶数のとき，$l+m+n$は偶数である．

よって，$l+m+n$が奇数ならば，l，m，nの少なくとも1つは奇数である．

lが奇数のとき，$1+3+3^2+\cdots\cdots+3^l$は奇数の偶数個の和なので偶数．したがって，Sは偶数である．

m，nが奇数のときはそれぞれ，$1+5+5^2+\cdots\cdots+5^m$，$1+7+7^2+\cdots\cdots+7^n$が偶数だから，Sは偶数である．

以上より，$l+m+n$が奇数のとき，整数$3^l\cdot5^m\cdot7^n$のすべての正の約数の総和は偶数である．

8 $p=5$のとき，$5^2=25=12\cdot2+1$から余り1

$p=7$のとき，$7^2=49=12\cdot4+1$から余り1

$p=11$のとき，$11^2=121=12\cdot10+1$から余り1

よって，**p^2を12で割った余りは1である**と予想できる．

pは3より大きい素数なので，5以上の奇数でかつ3の倍数でない．

したがって，整数を6で割った余りで分類して考えると，pを6で割った余りは1または5である．

よって，kを0以上の整数として，$p=6k+1$，$p=6k+5$と表せる．

$p=6k+1$のとき，$p^2=(6k+1)^2=36k^2+12k+1=12(3k^2+k)+1$

よって，p^2を12で割った余りは1

$p=6k+5$のとき，$p^2=(6k+5)^2=36k^2+60k+25=12(3k^2+5k+2)+1$

よって，p^2を12で割った余りは1

以上から，3より大きい素数pについて，p^2を12で割った余りは1である．

⑨ (1) $3a=b^3$ より，b^3 は3の倍数であるから，b は3の倍数である．$b=3k$（k は自然数）とおくと，$3a=(3k)^3$
よって，$a=9k^3$ となるから，a は3の倍数である．
同様にして，$5a=c^2$ から，a が5の倍数であることが導かれる．したがって，a は3と5で割り切れる．
(2) a が3と5以外の素因数 p をもつと仮定する．このとき，(1)と同様にして b，c は p の倍数になる．
よって，a，b，c の素因数 p の個数をそれぞれ k，l，m とすると，$a=p^k a'$，$b=p^l b'$，$c=p^m c'$ と表せる．
これらを $3a=b^3$，$5a=c^2$ に代入すると，$3p^k a'=p^{3l}b'^3$，$5p^k a'=p^{2m}c'^2$　両辺の p の指数より，$k=3l$，$k=2m$
よって，k は2かつ3，すなわち6の倍数である．$k=6n$ とおくと，$a=p^{6n}a'=(p^n)^6 a'$
設問の条件より d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d=1$ に限るので，$p^n=1$
これは p が素数であることに反する．したがって，a の素因数は3と5以外に存在しない．
(3)(2)から，$a=3^x\cdot 5^y$（x，y は自然数）とおける．d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d=1$ に限ることから，
$1\leqq x\leqq 5$，$1\leqq y\leqq 5$ である．このとき，$3a=b^3$，$5a=c^2$ より，$3^{x+1}\cdot 5^y=b^3$ ……①，$3^x\cdot 5^{y+1}=c^2$ ……②
①より，$x+1$，y は3の倍数だから，$(x+1,\ y)=(3,\ 3)$，$(6,\ 3)$　よって，$(x,\ y)=(2,\ 3)$，$(5,\ 3)$
②より，x，$y+1$ は2の倍数　よって，あてはまるのは，$(x,\ y)=(2,\ 3)$ のみとなる．
したがって，$a=3^2\cdot 5^3=$**1125**

2　ユークリッドの互除法

P107

1 (1) $588=63\cdot 9+21$，$63=21\cdot 3$ より，**21**
(2) $360=165\cdot 2+30$，$165=30\cdot 5+15$，$30=15\cdot 2$ より，**15**
(3) $667=299\cdot 2+69$，$299=69\cdot 4+23$，$69=23\cdot 3$ より，**23**
(4) $924=360\cdot 2+204$，$360=204\cdot 1+156$，$204=156\cdot 1+48$，$156=48\cdot 3+12$，$48=12\cdot 4$ より，**12**
(5) $874=323\cdot 2+228$，$323=228\cdot 1+95$，$228=95\cdot 2+38$，$95=38\cdot 2+19$，$38=19\cdot 2$ より，**19**
(6) $8568=1836\cdot 4+1224$，$1836=1224\cdot 1+612$，$1224=612\cdot 2$ より，**612**

2 (1) $450=210\cdot 2+30$，$210=30\cdot 7$ より，450と210の最大公約数は30
$165=30\cdot 5+15$，$30=15\cdot 2$ より，165と30の最大公約数は15　よって，3数の最大公約数は**15**
(2) $980=588\cdot 1+392$，$588=392\cdot 1+196$，$392=196\cdot 2$ より，980と588の最大公約数は196　$448=196\cdot 2+56$，
$196=56\cdot 3+28$，$56=28\cdot 2$ より，196と448の最大公約数は28　よって，3数の最大公約数は**28**
(3) $3080=1848\cdot 1+1232$，$1848=1232\cdot 1+616$，$1232=616\cdot 2$ より，3080と1848の最大公約数は616
$1323=616\cdot 2+91$，$616=91\cdot 6+70$，$91=70\cdot 1+21$，$70=21\cdot 3+7$，$21=7\cdot 3$ より，616と1323の最大公約数は7　よって，3数の最大公約数は**7**

3 (1) $3a+7b=(2a+5b)+a+2b$，$2a+5b=2(a+2b)+b$，$a+2b=2\cdot b+a$ より，$3a+7b$ と $2a+5b$ の最大公約数は b と a の最大公約数に等しい．よって，a と b が互いに素であることから，$3a+7b$ と $2a+5b$ は互いに素である．
(2) $28n+5=(21n+4)+7n+1$，$21n+4=3(7n+1)+1$ より，$28n+5$ と $21n+4$ の最大公約数は $7n+1$ と1の最大公約数に等しい．$7n+1$ と1は互いに素なので，$28n+5$ と $21n+4$ は互いに素である．

4 $9n+23=2(4n+11)+n+1$，$4n+11=4(n+1)+7$ より，$9n+23$ と $4n+11$ の最大公約数は $n+1$ と7の最大公約数に等しい．最大公約数が7だから，$n+1$ は7の倍数で，$1\leqq n\leqq 30$ より，$2\leqq n+1\leqq 31$ なので，
$n+1=7$，14，21，28　よって，$\boldsymbol{n=6,\ 13,\ 20,\ 27}$

P108

5 k はすべて整数とする．
(1) $x=3k$，$y=4k$　(2) $x=7k$，$y=-2k$　(3) $x=3k-1$，$y=5k-2$
(4) $x=3k-4$，$y=-2k+3$　(5) $x=6k+5$，$y=-5k$　(6) $x=3k+2$，$y=-8k+2$
(7) $x=8k+3$，$y=-5k+4$　(8) $x=7k-2$，$y=-13k+3$　(9) $x=11k+7$，$y=7k-1$

6 (1) $29=13\cdot 2+3\to 3=29-13\cdot 2$ ……①，$13=3\cdot 4+1\to 1=13-3\cdot 4$ ……②
①，②より，$1=13-3\cdot 4=13-4(29-13\cdot 2)=29\cdot(-4)+13\cdot 9$
よって，$29\cdot(-4)+13\cdot 9=1$ が成り立つから，方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(-4,\ 9)$ である．
したがって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=13k-4,\ y=-29k+9}$ **（k は整数）**

(2) $51=16\cdot 3+3\to 3=51-16\cdot 3$ ……①，$16=3\cdot 5+1\to 1=16-3\cdot 5$ ……②
①，②より，$1=16-3\cdot 5=16-5(51-16\cdot 3)=51\cdot(-5)-16\cdot(-16)$
よって，$51\cdot(-5)-16\cdot(-16)=1$ が成り立つから，方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(-5,\ -16)$ である．
したがって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=16k-5,\ y=51k-16}$ **（k は整数）**
(3) $37=31\cdot 1+6\to 6=37-31\cdot 1$ ……①，$31=6\cdot 5+1\to 1=31-6\cdot 5$ ……②
①，②より，$1=31-6\cdot 5=31-5(37-31\cdot 1)=37\cdot(-5)+31\cdot 6$
よって，$37\cdot(-5)+31\cdot 6=1$ が成り立つから，方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(-5,\ 6)$ である．
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=31k-5,\ y=-37k+6}$ **（k は整数）**
(4) $67=20\cdot 3+7\to 7=67-20\cdot 3$ ……①，$20=7\cdot 2+6\to 6=20-7\cdot 2$ ……②，$7=6\cdot 1+1\to 1=7-6\cdot 1$ ……③
①，②，③より，$1=7-6\cdot 1=7-(20-7\cdot 2)=7\cdot 3-20=3(67-20\cdot 3)-20=67\cdot 3+20\cdot(-10)$
よって，$67\cdot 3+20\cdot(-10)=1$ が成り立つから，方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(3,\ -10)$ である．
したがって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=20k+3,\ y=-67k-10}$ **（k は整数）**
(5) $73=51\cdot 1+22\to 22=73-51\cdot 1$ ……①，$51=22\cdot 2+7\to 7=51-22\cdot 2$ ……②，
$22=7\cdot 3+1\to 1=22-7\cdot 3$ ……③　①，②，③より，
$1=22-7\cdot 3=22-3(51-22\cdot 2)=22\cdot 7-51\cdot 3=7(73-51\cdot 1)-51\cdot 3=51\cdot(-10)-73\cdot(-7)$
よって，$51\cdot(-10)-73\cdot(-7)=1$ が成り立つから，方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(-10,\ -7)$ である．
したがって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=73k-10,\ y=51k-7}$ **（k は整数）**
(6) $47=32\cdot 1+15\to 15=47-32\cdot 1$ ……①，$32=15\cdot 2+2\to 2=32-15\cdot 2$ ……②，
$15=2\cdot 7+1\to 1=15-2\cdot 7$ ……③　①，②，③より，
$1=15-2\cdot 7=15-7(32-15\cdot 2)=15\cdot 15+32\cdot(-7)=15(47-32\cdot 1)+32\cdot(-7)=47\cdot 15+32\cdot(-22)$
よって，$47\cdot 15+32\cdot(-22)=1$ が成り立つから，両辺に3を掛けて，$47\cdot 45+32\cdot(-66)=3$
よって，方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(45,\ -66)$ である．
したがって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=32k+45,\ y=-47k-66}$ **（k は整数）**
(7) $51=14\cdot 3+9\to 9=51-14\cdot 3$ ……①，$14=9\cdot 1+5\to 5=14-9\cdot 1$ ……②，$9=5\cdot 1+4\to 4=9-5\cdot 1$ ……③，
$5=4\cdot 1+1\to 1=5-4\cdot 1$ ……④　①，②，③，④より，$1=5-4\cdot 1=5-(9-5\cdot 1)=5\cdot 2+9\cdot(-1)$
$=2(14-9\cdot 1)+9\cdot(-1)=14\cdot 2+9\cdot(-3)=14\cdot 2+(-3)\cdot(51-14\cdot 3)=51\cdot(-3)+14\cdot 11$
よって，$51\cdot(-3)+14\cdot 11=1$ が成り立つから，両辺に2を掛けて，$51\cdot(-6)+14\cdot 22=2$
よって，方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(-6,\ 22)$ である．
したがって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=14k-6,\ y=-51k+22}$ **（k は整数）**
(8) $41=17\cdot 2+7\to 7=41-17\cdot 2$ ……①，$17=7\cdot 2+3\to 3=17-7\cdot 2$ ……②，$7=3\cdot 2+1\to 1=7-3\cdot 2$ ……③
①，②，③より，$1=7-3\cdot 2=7-2(17-7\cdot 2)=7\cdot 5+17\cdot(-2)=5(41-17\cdot 2)+17\cdot(-2)=41\cdot 5+17\cdot(-12)$
よって，$41\cdot 5+17\cdot(-12)=1$ が成り立つから，両辺に30を掛けて，$41\cdot 150+17\cdot(-360)=30$
よって，方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(150,\ -360)$ である．
したがって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=17k+150,\ y=-41k-360}$ **（k は整数）**
(9) $65=19\cdot 3+8\to 8=65-19\cdot 3$ ……①，$19=8\cdot 2+3\to 3=19-8\cdot 2$ ……②，$8=3\cdot 2+2\to 2=8-3\cdot 2$ ……③
①，②，③より，$2=8-3\cdot 2=8-2(19-8\cdot 2)=19\cdot(-2)+8\cdot 5=19\cdot(-2)+5(65-19\cdot 3)=19\cdot(-17)+65\cdot 5$
よって，$19\cdot(-17)-65\cdot(-5)=2$ が成り立つから，両辺に10を掛けて，$19\cdot(-170)-65\cdot(-50)=20$
よって，方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(-170,\ -50)$ である．
したがって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=65k-170,\ y=19k-50}$ **（k は整数）**

P109

7 (1) $152x+71y=1$ ……① とする．$152=71\cdot 2+10$ なので，①に代入すると，$(71\cdot 2+10)x+71y=1$，
$71(2x+y)+10x=1$　$(2x+y,\ x)=(1,\ -7)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(-7,\ 15)$ は①の解の1つである．よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=71k-7,\ y=-152k+15}$ **（k は整数）**
(2) $67x+212y=1$ ……① とする．$212=67\cdot 3+11$ なので，①に代入すると，$67x+(67\cdot 3+11)y=1$，
$67(x+3y)+11y=1$　$(x+3y,\ y)=(1,\ -6)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(19,\ -6)$ は①の解の1つである．よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=212k+19,\ y=-67k-6}$ **（k は整数）**
(3) $551x-14y=2$ ……① とする．$551=14\cdot 39+5$ なので，①に代入すると，$(14\cdot 39+5)x-14y=2$，
$14(39x-y)+5x=2$　$(39x-y,\ x)=(3,\ -8)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(-8,\ -315)$ は①の解の1つである．よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=14k-8,\ y=551k-315}$ **（k は整数）**

(4) $129x+67y=5$ ……① とする．$129=67\cdot1+62$ なので，①に代入すると，$(67+62)x+67y=5$,
$62x+67(x+y)=5$ $(x,\ x+y)=(-1,\ 1)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(-1,\ 2)$ は①の解の1つである．よって，求める整数解は，**$x=67k-1$, $y=-129k+2$ (k は整数)**

(5) $74x+235y=7$ ……① とする．$235=74\cdot3+13$ なので，①に代入すると，$74x+(74\cdot3+13)y=7$,
$74(x+3y)+13y=7$ ……② $74=13\cdot5+9$ なので，②に代入すると，$(13\cdot5+9)(x+3y)+13y=7$,
$13\{5(x+3y)+y\}+9(x+3y)=7$, $13(5x+16y)+9(x+3y)=7$
$(5x+16y,\ x+3y)=(4,\ -5)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(-92,\ 29)$ は①の解の1つである．
よって，求める整数解は，**$x=235k-92$, $y=-74k+29$ (k は整数)**

(6) $335x+32y=3$ ……① とする．$335=32\cdot10+15$ なので，①に代入すると，$(32\cdot10+15)x+32y=3$,
$15x+32(10x+y)=3$ ……② $32=15\cdot2+2$ なので，②に代入すると，$15x+(15\cdot2+2)(10x+y)=3$,
$15\{x+2(10x+y)\}+2(10x+y)=3$, $15(21x+2y)+2(10x+y)=3$
$(21x+2y,\ 10x+y)=(1,\ -6)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(13,\ -136)$ は①の解の1つである．
よって，求める整数解は，**$x=32k+13$, $y=-335k-136$ (k は整数)**

8 (1) 商…10，余り…10

(2) $1900=189\cdot10+10=128\cdot10+61\cdot10+10$ より，方程式は，$128(x-10)+61(y-10)=10$ と変形できる．
$x-10=X$, $y-10=Y$ とおくと，$128X+61Y=10$ ……① $128=61\cdot2+6$ より，$6X+61(2X+Y)=10$
$61=6\cdot10+1$ より，$6(21X+10Y)+(2X+Y)=10$ $(21X+10Y,\ 2X+Y)=(1,\ 4)$ はこの方程式を満たすので，$(X,\ Y)=(-39,\ 82)$ は①の解の1つである．よって，もとの方程式の1つの解は，
$(x,\ y)=(-29,\ 92)$ となるから，求める整数解は，**$x=61k-29$, $y=-128k+92$ (k は整数)**

9 上の式を①，下の式を②とする．

(1) ①+② より，$9x+5y=50$ ……③ この方程式の1つの解は，$(x,\ y)=(0,\ 10)$ だから，③の解は，
$x=5k$, $y=-9k+10$ (k は整数) これらを①に代入して，$3\cdot5k+8(-9k+10)-z=27$, $z=-57k+53$
以上より，求める整数解は，**$x=5k$, $y=-9k+10$, $z=-57k+53$ (k は整数)**

(2) ②×3−① より，$x+11y=-8$ ……③ この方程式の1つの解は，$(x,\ y)=(-8,\ 0)$ だから，③の解は，
$x=11k-8$, $y=-k$ (k は整数) これらを②に代入して，$3(11k-8)+2\cdot(-k)+z=9$, $z=-31k+33$
以上より，求める整数解は，**$x=11k-8$, $y=-k$, $z=-31k+33$ (k は整数)**

(3) ①+②×5 より，$17x-9y=26$ ……③ この方程式の1つの解は，$(x,\ y)=(1,\ -1)$ だから，③の解は，
$x=9k+1$, $y=17k-1$ (k は整数) これらを②に代入して，$2(9k+1)-3(17k-1)-z=4$, $z=-33k+1$
以上より，求める整数解は，**$x=9k+1$, $y=17k-1$, $z=-33k+1$ (k は整数)**

(4) ①−②×2 より，$-25y+9z=2$ ……③ この方程式の1つの解は，$(y,\ z)=(1,\ 3)$ だから，③の解は，
$y=9k+1$, $z=25k+3$ (k は整数) これらを②に代入して，$x+8(9k+1)+(25k+3)=20$, $x=-97k+9$
以上より，求める整数解は，**$x=-97k+9$, $y=9k+1$, $z=25k+3$ (k は整数)**

P110

10 (1) $z=s$ (s は整数) とおくと，$2x+3y=7-5s$ ……① $2\cdot(-1)+3\cdot1=1$ が成り立つので，両辺に $7-5s$ を掛けて，$2(-7+5s)+3(7-5s)=7-5s$ ……② ①−② から，$2(x-5s+7)+3(y+5s-7)=0$,
$2(x-5s+7)=-3(y+5s-7)$ 2 と 3 は互いに素なので，t を整数として，$x-5s+7=3t$, $y+5s-7=-2t$
すなわち，$x=5s+3t-7$, $y=-5s-2t+7$ が導かれる．
以上より，求める整数解は，**$x=5s+3t-7$, $y=-5s-2t+7$, $z=s$ (s, t は整数)**

(2) $z=s$ (s は整数) とおくと，$3x-7y=3+11s$ ……① $3\cdot(-2)-7\cdot(-1)=1$ が成り立つので，両辺に $3+11s$ を掛けて，$3(-6-22s)-7(-3-11s)=3+11s$ ……② ①−② から，$3(x+22s+6)-7(y+11s+3)=0$,
$3(x+22s+6)=7(y+11s+3)$ 3 と 7 は互いに素なので，t を整数として，$x+22s+6=7t$, $y+11s+3=3t$
すなわち，$x=-22s+7t-6$, $y=-11s+3t-3$ が導かれる．
以上より，求める整数解は，**$x=-22s+7t-6$, $y=-11s+3t-3$, $z=s$ (s, t は整数)**

(3) $z=s$ (s は整数) とおくと，$11x+13y=1-4s$ ……① $11\cdot6+13\cdot(-5)=1$ が成り立つので，両辺に $1-4s$ を掛けて，$11(6-24s)+13(-5+20s)=1-4s$ ……② ①−② から，$11(x+24s-6)+13(y-20s+5)=0$,
$11(x+24s-6)=-13(y-20s+5)$ 11と13は互いに素なので，t を整数として，$x+24s-6=13t$,
$y-20s+5=-11t$ すなわち，$x=-24s+13t+6$, $y=20s-11t-5$ が導かれる．
以上より，求める整数解は，**$x=-24s+13t+6$, $y=20s-11t-5$, $z=s$ (s, t は整数)**

(4) $z=s$ (s は整数) とおくと，$23x+17y=9-7s$ ……① $23\cdot3+17\cdot(-4)=1$ が成り立つので，両辺に $9-7s$ を掛けて，$23(27-21s)+17(-36+28s)=9-7s$ ……② ①−② から，$23(x+21s-27)+17(y-28s+36)=0$,
$23(x+21s-27)=-17(y-28s+36)$ 23と17は互いに素なので，t を整数として，$x+21s-27=17t$,
$y-28s+36=-23t$ すなわち，$x=-21s+17t+27$, $y=28s-23t-36$ が導かれる．
以上より，求める整数解は，**$x=-21s+17t+27$, $y=28s-23t-36$, $z=s$ (s, t は整数)**

11 (1) $x=X+31$, $y=Y+31$, $z=Z+31$ を①に代入すると，$4(X+31)+11(Y+31)+17(Z+31)=1000$,
$4X+11Y+17Z=8$ $Z=s$ とおくと，$4X+11Y=8-17s$ ……① $4\cdot3+11\cdot(-1)=1$ が成り立つので，両辺に $8-17s$ を掛けて，$4(24-51s)+11(-8+17s)=8-17s$ ……② ①−②から，
$4(X+51s-24)+11(Y-17s+8)=0$, $4(X+51s-24)=-11(Y-17s+8)$ 4 と11は互いに素なので，t を整数として，$X+51s-24=11t$, $Y-17s+8=-4t$ より，$X=-51s+11t+24$, $Y=17s-4t-8$
以上より，**$X=-51s+11t+24$, $Y=17s-4t-8$, $Z=s$ (s, t は整数)**

(2) (1)の結果より，**$x=-51s+11t+55$, $y=17s-4t+23$, $z=s+31$ (s, t は整数)**

12 求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，$n=6x+5$, $n=11y+8$ のように表される．
よって，$6x+5=11y+8$, $6x-11y=3$ ……① $(x,\ y)=(6,\ 3)$ は①の解の1つだから，①の解は，
$x=11k+6$, $y=6k+3$ (k は整数) したがって，$n=6x+5=6(11k+6)+5=66k+41$ (k は整数)
このような3桁の自然数 n で最小のものは，$66\cdot1+41=$**107**

13 このような自然数を n とすると，n は x，y を整数として，$n=13x+6$, $n=23y+9$ のように表される．
よって，$13x+6=23y+9$, $13x-23y=3$ ……① $(x,\ y)=(2,\ 1)$ は①の解の1つだから，
①の解は，$x=23k+2$, $y=13k+1$ (k は整数) したがって，$n=13x+6=13(23k+2)+6=299k+32$ (k は整数)
このような n で1000以下のものは，$n=32$, 331, 630, 929の**4個**

P111

14 求める自然数を n とすると，n は x，y，z を整数として，$n=3x+1$ ……①，$n=7y+2$ ……②，
$n=11z+5$ ……③ のように表される．①，②より，$3x+1=7y+2$, $3x-7y=1$ 解の1つが
$(x,\ y)=(-2,\ -1)$ だから，$x=7k-2$, $y=3k-1$ (k は整数) ①に代入すると，$n=3x+1=3(7k-2)+1$
$=21k-5$ (k は整数) ……④ ③，④より，$21k-5=11z+5$, $21k-11z=10$ 解の1つが $(k,\ z)=(1,\ 1)$ だから，$k=11l+1$, $z=21l+1$ (l は整数) ④に代入すると，$n=21(11l+1)-5=231l+16$ (l は整数)
このような n で3桁のものは，**247, 478, 709, 940**

15 (1) m は x，y を整数として，$m=7x+5$ ……①，$m=11y+6$ ……② のように表される．①，②より，
$7x+5=11y+6$, $7x-11y=1$ 解の1つが $(x,\ y)=(-3,\ -2)$ だから，$x=11k-3$, $y=7k-2$ (k は整数)
①に代入すると，$m=7(11k-3)+5=77k-16=77(k-1)+61$
したがって，m を77で割った余りは**61**

(2) $m^2=(77k-16)^2=(77k)^2-32\cdot77k+256=77(77k^2-32k+3)+25$
したがって，m^2 を77で割った余りは**25**

16 (1) $5x+2y=41$ の解の1つは $(x,\ y)=(7,\ 3)$ だから，整数解は，$x=2k+7$, $y=-5k+3$ (k は整数) である．
x，y は自然数なので，$2k+7\geqq1$, $-5k+3\geqq1$ よって，$-3\leqq k\leqq\frac{2}{5}$ より，$k=-3$, -2, -1, 0
求める自然数の組は，**$(x,\ y)=(1,\ 18)$, $(3,\ 13)$, $(5,\ 8)$, $(7,\ 3)$**

(2) $4x+3y=67$ の解の1つは $(x,\ y)=(16,\ 1)$ だから，整数解は，$x=3k+16$, $y=-4k+1$ (k は整数)である．
x，y は自然数なので，$3k+16\geqq1$, $-4k+1\geqq1$ よって，$-5\leqq k\leqq0$, $k=-5$, -4, -3, -2, -1, 0
求める自然数の組は，**$(x,\ y)=(1,\ 21)$, $(4,\ 17)$, $(7,\ 13)$, $(10,\ 9)$, $(13,\ 5)$, $(16,\ 1)$**

(3) $2x+7y=59$ の解の1つは $(x,\ y)=(26,\ 1)$ だから，整数解は，$x=7k+26$, $y=-2k+1$ (k は整数) である．
x，y は自然数なので，$7k+26\geqq1$, $-2k+1\geqq1$ よって，$-\frac{25}{7}\leqq k\leqq0$ より，$k=-3$, -2, -1, 0
求める自然数の組は，**$(x,\ y)=(5,\ 7)$, $(12,\ 5)$, $(19,\ 3)$, $(26,\ 1)$**

(4) $5x+8y=162$ の解の1つは $(x,\ y)=(34,\ -1)$ だから，整数解は，$x=8k+34$, $y=-5k-1$ (k は整数)である．x，y は自然数なので，$8k+34\geqq1$, $-5k-1\geqq1$ よって，$-\frac{33}{8}\leqq k\leqq-\frac{2}{5}$ より，
$k=-4$, -3, -2, -1 求める自然数の組は，**$(x,\ y)=(2,\ 19)$, $(10,\ 14)$, $(18,\ 9)$, $(26,\ 4)$**

(5) $11x+3y=217$ の解の1つは $(x,\ y)=(20,\ -1)$ だから，整数解は，$x=3k+20$，$y=-11k-1$（k は整数）である．x，y は自然数なので，$3k+20\geqq1$，$-11k-1\geqq1$ よって，$-\frac{19}{3}\leqq k\leqq-\frac{2}{11}$ より，

$k=-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1$

求める自然数の組は，**$(x,\ y)=(2,\ 65),\ (5,\ 54),\ (8,\ 43),\ (11,\ 32),\ (14,\ 21),\ (17,\ 10)$**

(6) $7x+5y=249$ の解の1つは $(x,\ y)=(2,\ 47)$ だから，整数解は，$x=5k+2$，$y=-7k+47$（k は整数）である．

x，y は自然数なので，$5k+2\geqq1$，$-7k+47\geqq1$ よって，$-\frac{1}{5}\leqq k\leqq\frac{46}{7}$ より，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

求める自然数の組は，**$(x,\ y)=(2,\ 47),\ (7,\ 40),\ (12,\ 33),\ (17,\ 26),\ (22,\ 19),\ (27,\ 12),\ (32,\ 5)$**

17 $41x+17y=4200$ ……① とする．$41=17\cdot2+7$ なので①に代入すると，$(17\cdot2+7)x+17y=4200$，

$17(2x+y)+7x=4200$ $(2x+y,\ x)=(0,\ 600)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(600,\ -1200)$

これは①の解の1つだから，$x=17k+600$，$y=-41k-1200$（k は整数）

x，y は自然数なので，$17k+600\geqq1$，$-41k-1200\geqq1$ よって，$-\frac{599}{17}\leqq k\leqq-\frac{1201}{41}$，$-35\frac{4}{17}\leqq k\leqq-29\frac{12}{41}$

より，$k=-35,\ -34,\ -33,\ -32,\ -31,\ -30$

求める自然数の組は，**$(x,\ y)=(5,\ 235),\ (22,\ 194),\ (39,\ 153),\ (56,\ 112),\ (73,\ 71),\ (90,\ 30)$**

18 (1)方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(0,\ 1000)$ なので，整数解は，$x=3k$，$y=-4k+1000$（k は整数）

x，y は自然数なので，$3k\geqq1$，$-4k+1000\geqq1$ よって，$\frac{1}{3}\leqq k\leqq\frac{999}{4}$，$\frac{1}{3}\leqq k\leqq249\frac{3}{4}$

不等式を満たす整数 k の個数は1～249の249個．したがって，自然数の組 $(x,\ y)$ の個数は**249個**．

(2)方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(400,\ 2)$ なので，整数解は，$x=7k+400$，$y=-5k+2$（k は整数）

x，y は自然数なので，$7k+400\geqq1$，$-5k+2\geqq1$ よって，$-57\leqq k\leqq\frac{1}{5}$

不等式を満たす整数 k の個数は -57～0の58個．したがって，自然数の組 $(x,\ y)$ の個数は**58個**．

(3)方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(1,\ 2058)$ なので，整数解は，$x=2k+1$，$y=-11k+2058$（k は整数）

x，y は自然数なので，$2k+1\geqq1$，$-11k+2058\geqq1$ よって，$0\leqq k\leqq187$

不等式を満たす整数 k の個数は0～187の188個．したがって，自然数の組 $(x,\ y)$ の個数は**188個**．

(4)方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(1673,\ -1)$ なので，整数解は，$x=19k+1673$，$y=-3k-1$（k は整数）

x，y は自然数なので，$19k+1673\geqq1$，$-3k-1\geqq1$ よって，$-88\leqq k\leqq-\frac{2}{3}$

不等式を満たす整数 k の個数は -88～-1 の88個．したがって，自然数の組 $(x,\ y)$ の個数は**88個**．

19 鉛筆を x 本，ペンを y 本買うとする．$50x+80y=8700$ ……① を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めればよい．①より，$5x+8y=870$ $(x,\ y)=(174,\ 0)$ が解の1つなので，$x=8k+174$，$y=-5k$（k は整数）

x，y は自然数なので，$8k+174\geqq1$，$-5k\geqq1$ よって，$-\frac{173}{8}\leqq k\leqq-\frac{1}{5}$，$-21\frac{5}{8}\leqq k\leqq-\frac{1}{5}$

不等式を満たす整数 k の個数は -21～-1 の21個．したがって，買い方は**21通り**．

P112

20 (1) $2x+3y+7z=34$ から，$7z=34-2x-3y$ $x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから，$7z\leqq34-2\cdot1-3\cdot1=29$，$z\leqq\frac{29}{7}$

よって，$z=1,\ 2,\ 3,\ 4$

[1] $z=1$ のとき，$2x+3y=27$，$3y=27-2x$ から，$27-2x$ は正で，かつ3の倍数である．

よって，$x=3,\ 6,\ 9,\ 12$ ゆえに，$(x,\ y)=(3,\ 7),\ (6,\ 5),\ (9,\ 3),\ (12,\ 1)$

[2] $z=2$ のとき，$2x+3y=20$，$3y=20-2x$ から，[1]と同様にして，$x=1,\ 4,\ 7$

ゆえに，$(x,\ y)=(1,\ 6),\ (4,\ 4),\ (7,\ 2)$

[3] $z=3$ のとき，$2x+3y=13$，$3y=13-2x$ から，[1]と同様にして，$x=2,\ 5$

ゆえに，$(x,\ y)=(2,\ 3),\ (5,\ 1)$

[4] $z=4$ のとき，$2x+3y=6$，$3y=6-2x$ この等式を満たす自然数 x，y は存在しない．

以上から，**$(x,\ y,\ z)=(3,\ 7,\ 1),\ (6,\ 5,\ 1),\ (9,\ 3,\ 1),\ (12,\ 1,\ 1),\ (1,\ 6,\ 2),\ (4,\ 4,\ 2),$
$(7,\ 2,\ 2),\ (2,\ 3,\ 3),\ (5,\ 1,\ 3)$**

(2) $6x+2y+z=19$ から，$6x=19-2y-z$ $y\geqq1$，$z\geqq1$ であるから，$6x\leqq19-2\cdot1-1=16$，$x\leqq\frac{8}{3}$

よって，$x=1,\ 2$

[1] $x=1$ のとき，$2y+z=13$，$2y=13-z$ から，$13-z$ は正で，かつ2の倍数である．よって，

$z=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$ ゆえに，$(y,\ z)=(6,\ 1),\ (5,\ 3),\ (4,\ 5),\ (3,\ 7),\ (2,\ 9),\ (1,\ 11)$

[2] $x=2$ のとき，$2y+z=7$，$2y=7-z$ から，[1]と同様にして，$z=1,\ 3,\ 5$

ゆえに，$(y,\ z)=(3,\ 1),\ (2,\ 3),\ (1,\ 5)$

以上から，**$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 11),\ (1,\ 2,\ 9),\ (1,\ 3,\ 7),\ (1,\ 4,\ 5),\ (1,\ 5,\ 3),\ (1,\ 6,\ 1),$
$(2,\ 1,\ 5),\ (2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1)$**

(3) $5x+11y+21z=84$ から，$21z=84-5x-11y$ $x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから，$21z\leqq84-5\cdot1-11\cdot1=68$，$z\leqq\frac{68}{21}$

よって，$z=1,\ 2,\ 3$

[1] $z=1$ のとき，$5x+11y=63$，$5x=63-11y$ から，$63-11y$ は正で，かつ5の倍数である．よって，$y=3$

ゆえに，$(x,\ y)=(6,\ 3)$

[2] $z=2$ のとき，$5x+11y=42$，$5x=42-11y$ から，[1]と同様にして，$y=2$ ゆえに，$(x,\ y)=(4,\ 2)$

[3] $z=3$ のとき，$5x+11y=21$，$5x=21-11y$ から，[1]と同様にして，$y=1$ ゆえに，$(x,\ y)=(2,\ 1)$

以上から，**$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 3),\ (4,\ 2,\ 2),\ (6,\ 3,\ 1)$**

(4) $35x+21y+60z=665$ から，$60z=665-35x-21y$ $x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから，$60z\leqq665-35\cdot1-21\cdot1=609$，

$z\leqq\frac{203}{20}$ また，$60z=7(95-5x-3y)$ から $60z$ は7の倍数であるが，60と7は互いに素なので，z が7の倍数である．よって，$z=7$

このとき，$35x+21y=245$，$5x+3y=35$，$3y=35-5x$ から，$35-5x$ は正で，かつ3の倍数である．

よって，$x=1,\ 4$ ゆえに，$(x,\ y)=(1,\ 10),\ (4,\ 5)$ 以上から，**$(x,\ y,\ z)=(1,\ 10,\ 7),\ (4,\ 5,\ 7)$**

21 $3x+2y+4z^2=43$ から，$4z^2=43-3x-2y$ $x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから，$4z^2\leqq43-3\cdot1-2\cdot1=38$，$z^2\leqq\frac{19}{2}$

z は自然数なので，$z=1,\ 2,\ 3$

[1] $z=1$ のとき，$3x+2y=39$，$3x=39-2y$ から，$39-2y$ は正で，かつ3の倍数である．よって，

$y=3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18$ ゆえに，$(x,\ y)=(11,\ 3),\ (9,\ 6),\ (7,\ 9),\ (5,\ 12),\ (3,\ 15),\ (1,\ 18)$

[2] $z=2$ のとき，$3x+2y=27$ [1]と同様にして，$y=3,\ 6,\ 9,\ 12$

ゆえに，$(x,\ y)=(7,\ 3),\ (5,\ 6),\ (3,\ 9),\ (1,\ 12)$

[3] $z=3$ のとき，$3x+2y=7$ [1]と同様にして，$y=2$ ゆえに，$(x,\ y)=(1,\ 2)$

以上から，**$(x,\ y,\ z)=(11,\ 3,\ 1),\ (9,\ 6,\ 1),\ (7,\ 9,\ 1),\ (5,\ 12,\ 1),\ (3,\ 15,\ 1),\ (1,\ 18,\ 1),$
$(7,\ 3,\ 2),\ (5,\ 6,\ 2),\ (3,\ 9,\ 2),\ (1,\ 12,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3)$**

22 あめを x 個，ガムを y 個，チョコレートを z 個買うとする．このとき，x，y，z は，$20x+50y+80z=500$ を満たす自然数である．これより，$2x+5y+8z=50$，$8z=50-2x-5y$ $x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから，

$8z\leqq50-2\cdot1-5\cdot1=43$，$z\leqq\frac{43}{8}$ よって，$z=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

[1] $z=1$ のとき，$2x+5y=42$，$2x=42-5y$ から，$42-5y$ は正で，かつ2の倍数である．

よって，$y=2,\ 4,\ 6,\ 8$ ゆえに，$(x,\ y)=(16,\ 2),\ (11,\ 4),\ (6,\ 6),\ (1,\ 8)$

[2] $z=2$ のとき，$2x+5y=34$ [1]と同様にして，$y=2,\ 4,\ 6$ ゆえに，$(x,\ y)=(12,\ 2),\ (7,\ 4),\ (2,\ 6)$

[3] $z=3$ のとき，$2x+5y=26$ [1]と同様にして，$y=2,\ 4$ ゆえに，$(x,\ y)=(8,\ 2),\ (3,\ 4)$

[4] $z=4$ のとき，$2x+5y=18$ [1]と同様にして，$y=2$ ゆえに，$(x,\ y)=(4,\ 2)$

[5] $z=5$ のとき，$2x+5y=10$ これを満たす自然数 x，y は存在しない．

以上から，あめ，ガム，チョコレートの買い方は，$4+3+2+1=$**10（通り）**

P113

23 (1)(左辺) $=x(y-3)-2(y-3)-6+3=(x-2)(y-3)-3$ より，方程式は，$(x-2)(y-3)=3$ と変形できる．

よって，$(x-2,\ y-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (-1,\ -3),\ (-3,\ -1)$

したがって，**$(x,\ y)=(3,\ 6),\ (5,\ 4),\ (1,\ 0),\ (-1,\ 2)$**

(2)(左辺)$=x(y-3)+5(y-3)+15-11=(x+5)(y-3)+4$ より，方程式は，$(x+5)(y-3)=-4$ と変形できる．
よって，$(x+5,\ y-3)=(1,\ -4),\ (2,\ -2),\ (4,\ -1),\ (-1,\ 4),\ (-2,\ 2),\ (-4,\ 1)$
したがって，**$(x,\ y)=(-4,\ -1),\ (-3,\ 1),\ (-1,\ 2),\ (-6,\ 7),\ (-7,\ 5),\ (-9,\ 4)$**

(3)(左辺)$=x(y+4)+2(y+4)-8-7=(x+2)(y+4)-15$ より，方程式は，$(x+2)(y+4)=15$ と変形できる．
$(x+2,\ y+4)=(1,\ 15),\ (3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (15,\ 1),\ (-1,\ -15),\ (-3,\ -5),\ (-5,\ -3),\ (-15,\ -1)$
したがって，**$(x,\ y)=(-1,\ 11),\ (1,\ 1),\ (3,\ -1),\ (13,\ -3),\ (-3,\ -19),\ (-5,\ -9),$**
$(-7,\ -7),\ (-17,\ -5)$

(4)(左辺)$=x(y+8)+9(y+8)-72+17=(x+9)(y+8)-55$ より，方程式は，$(x+9)(y+8)=55$ と変形できる．
$(x+9,\ y+8)=(1,\ 55),\ (5,\ 11),\ (11,\ 5),\ (55,\ 1),\ (-1,\ -55),\ (-5,\ -11),\ (-11,\ -5),$
$(-55,\ -1)$
したがって，**$(x,\ y)=(-8,\ 47),\ (-4,\ 3),\ (2,\ -3),\ (46,\ -7),\ (-10,\ -63),\ (-14,\ -19),$**
$(-20,\ -13),\ (-64,\ -9)$

24 (1)(左辺)$=x(2y+3)+(2y+3)-3-3=(x+1)(2y+3)-6$ より，方程式は，$(x+1)(2y+3)=6$ と変形できる．
よって，$(x+1,\ 2y+3)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1),\ (-1,\ -6),\ (-2,\ -3),\ (-3,\ -2),$
$(-6,\ -1)$　x，y は整数なので，**$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (5,\ -1),\ (-3,\ -3),\ (-7,\ -2)$**

(2)(左辺)$=3x(2y+3)-2(2y+3)+6+15=(3x-2)(2y+3)+21$ より，方程式は，$(3x-2)(2y+3)=-21$ と変形できる．よって，$(3x-2,\ 2y+3)=(1,\ -21),\ (3,\ -7),\ (7,\ -3),\ (21,\ -1),\ (-1,\ 21),\ (-3,\ 7),$
$(-7,\ 3),\ (-21,\ 1)$　x，y は整数なので，**$(x,\ y)=(1,\ -12),\ (3,\ -3)$**

25 (1)(左辺)$=x(y-3)+2(y-3)+6-12=(x+2)(y-3)-6$ より，方程式は，$(x+2)(y-3)=6$ と変形できる．
x，y は自然数だから，$x+2\geqq 3$，$y-3\geqq -2$　よって，$(x+2,\ y-3)=(3,\ 2),\ (6,\ 1)$
したがって，**$(x,\ y)=(1,\ 5),\ (4,\ 4)$**

(2)(左辺)$=x(y-5)+3(y-5)+15-27=(x+3)(y-5)-12$ より，方程式は，$(x+3)(y-5)=12$ と変形できる．
x，y は自然数だから，$x+3\geqq 4$，$y-5\geqq -4$　よって，$(x+3,\ y-5)=(4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1)$
したがって，**$(x,\ y)=(1,\ 8),\ (3,\ 7),\ (9,\ 6)$**

(3)(左辺)$=x(3y-1)+(3y-1)+1-56=(x+1)(3y-1)-55$ より，方程式は，$(x+1)(3y-1)=55$ と変形できる．
x，y は自然数だから，$x+1\geqq 2$，$3y-1\geqq 2$　よって，$(x+1,\ 3y-1)=(5,\ 11),\ (11,\ 5)$
したがって，**$(x,\ y)=(4,\ 4),\ (10,\ 2)$**

(4)(左辺)$=2x(3y+1)-(3y+1)+1-13=(2x-1)(3y+1)-12$ より，方程式は，$(2x-1)(3y+1)=12$ と変形できる．x，y は自然数だから，$2x-1$ は正の奇数であり，$3y+1\geqq 4$
よって，$(2x-1,\ 3y+1)=(1,\ 12),\ (3,\ 4)$　このうち，y が自然数となるのは，**$(x,\ y)=(2,\ 1)$**

26 (1)両辺に xy を掛けて整理すると，$xy-4x-3y=0$，$x(y-4)-3(y-4)=12$，$(x-3)(y-4)=12$
x，y は自然数なので，$x-3\geqq -2$，$y-4\geqq -3$
よって，$(x-3,\ y-4)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1)$
すなわち，**$(x,\ y)=(4,\ 16),\ (5,\ 10),\ (6,\ 8),\ (7,\ 7),\ (9,\ 6),\ (15,\ 5)$**

(2)両辺に $2xy$ を掛けて整理すると，$2xy-3x-4y=0$，$x(2y-3)-2(2y-3)=6$，$(x-2)(2y-3)=6$
x，y は自然数なので，$x-2\geqq -1$，$2y-3\geqq -1$　また，$2y-3$ は奇数である．
よって，$(x-2,\ 2y-3)=(2,\ 3),\ (6,\ 1)$
すなわち，**$(x,\ y)=(4,\ 3),\ (8,\ 2)$**

27 $\sqrt{n^2+99}=m$ (m は自然数) とおく．このとき，$n^2+99=m^2$，$m^2-n^2=99$，$(m+n)(m-n)=99$
$m+n>m-n>0$ なので，$(m+n,\ m-n)=(99,\ 1),\ (33,\ 3),\ (11,\ 9)$
よって，$(m,\ n)=(50,\ 49),\ (18,\ 15),\ (10,\ 1)$
したがって，**$n=1,\ 15,\ 49$**

28 ①より，$x=60-y-z$ ……④　これを②に代入して，$(60-y-z)^2=y^2+z^2$，
$3600+y^2+z^2-120y+2yz-120z=y^2+z^2$，$yz-60y-60z+1800=0$，$y(z-60)-60(z-60)-3600+1800=0$，
$(y-60)(z-60)=1800$　$x\geqq 3$，$z\geqq 1$ より，$1\leqq z<y\leqq 56$ なので，$-59\leqq z-60<y-60\leqq -4$
よって，$(y-60,\ z-60)=(-36,\ -50),\ (-40,\ -45)$　すなわち，$(y,\ z)=(24,\ 10),\ (20,\ 15)$
このとき，④より，$x=60-24-10=26$，または，$x=60-20-15=25$ であり，これらはともに $x>y$ を満たしている．したがって，**$(x,\ y,\ z)=(26,\ 24,\ 10),\ (25,\ 20,\ 15)$**

29 $x^3+y^3-2x^2y=1$ より，$(x^3-x^2y)+(y^3-x^2y)=1$，$(x-y)x^2-y(x^2-y^2)=1$，$(x-y)\{x^2-y(x+y)\}=1$，
$(x-y)(x^2-xy-y^2)=1$　x，y は整数だから，$x-y$，x^2-xy-y^2 も整数である．
よって，$(x-y,\ x^2-xy-y^2)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$
(i)$x-y=1$ ……①，$x^2-xy-y^2=1$ ……② のとき，①から，$x=y+1$　②に代入して，
$(y+1)^2-(y+1)y-y^2=1$，$y^2-y=0$，$y(y-1)=0$ より，$y=0,\ 1$
$y=0$ のとき，$x=1$　$y=1$ のとき，$x=2$
(ii)$x-y=-1$ ……③，$x^2-xy-y^2=-1$ ……④ のとき，③から，$x=y-1$　④に代入して，
$(y-1)^2-(y-1)y-y^2=-1$，$y^2+y-2=0$，$(y+2)(y-1)=0$ より，$y=-2,\ 1$
$y=-2$ のとき，$x=-3$　$y=1$ のとき，$x=0$
したがって，**$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (2,\ 1),\ (-3,\ -2),\ (0,\ 1)$**

P114 〔混合問題〕

1 (1)$2385=424\cdot 5+265$，$424=265\cdot 1+159$，$265=159\cdot 1+106$，$159=106\cdot 1+53$，$106=53\cdot 2$ より，**53**
(2)$3007=1649\cdot 1+1358$，$1649=1358\cdot 1+291$，$1358=291\cdot 4+194$，$291=194\cdot 1+97$，$194=97\cdot 2$ より，**97**
(3)$9261=5544\cdot 1+3717$，$5544=3717\cdot 1+1827$，$3717=1827\cdot 2+63$，$1827=63\cdot 29$ より，9261と5544の最大公約数は63　$3080=63\cdot 48+56$，$63=56\cdot 1+7$，$56=7\cdot 8$ より，3080と63の最大公約数は7
よって，3数の最大公約数は**7**

2 (1)$7x+5y=1$ において，$x=3$，$y=-4$ は解の1つであるから，**$x=5k+3$，$y=-7k-4$ (k は整数)**
(2)$11x-8y=5$ において，$x=-1$，$y=-2$ は解の1つであるから，**$x=8k-1$，$y=11k-2$ (k は整数)**
(3)$17x+53y=1$ ……① より，$17x+(17\cdot 3+2)y=1$，$17(x+3y)+2y=1$　$(x+3y,\ y)=(1,\ -8)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(25,\ -8)$ は①の解の1つであるから，
$x=53k+25$，$y=-17k-8$ (k は整数)
(4)$47x-13y=2$ ……① より，$(13\cdot 3+8)x-13y=2$，$13(3x-y)+8x=2$，$(3x-y,\ x)=(2,\ -3)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(-3,\ -11)$ は①の解の1つであるから，求める整数解は，
$x=13k-3$，$y=47k-11$ (k は整数)

3 $2012=401\cdot 5+7=301\cdot 5+100\cdot 5+7$ より，方程式は $301(x-5)+100(y-5)=7$ と変形できる．$x-5=X$，$y-5=Y$ とおくと，$301X+100Y=7$　$301=100\cdot 3+1$ より，$X+100(3X+Y)=7$　$(X,\ 3X+Y)=(7,\ 0)$ はこの方程式を満たすので，$(X,\ Y)=(7,\ -21)$ は解の1つである．よって，もとの方程式の1つの解は，$x=12$，$y=-16$ となるから，求める整数解は，**$x=100k+12$，$y=-301k-16$ (k は整数)**

4 求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，$n=39x+5$，$n=43y+8$ のように表される．
よって，$39x+5=43y+8$，$39x-43y=3$ ……①　これより，$39(x-y)-4y=3$
$(x-y,\ y)=(1,\ 9)$ はこの方程式を満たすので，$(x,\ y)=(10,\ 9)$ は①の解の1つである．
よって，$x=43k+10$，$y=39k+9$ (k は整数)
したがって，$n=39x+5=39(43k+10)+5=1677k+395$ (k は整数)
よって，求める最小の自然数は**395**

5 (1)方程式の解の1つは，$(x,\ y)=(2,\ 286)$ なので，整数解は，$x=3k+2$，$y=-13k+286$ (k は整数)
x，y は自然数なので，$3k+2\geqq 1$，$-13k+286\geqq 1$　よって，$-\frac{1}{3}\leqq k\leqq\frac{285}{13}$，$-\frac{1}{3}\leqq k\leqq 21\frac{12}{13}$
不等式を満たす整数 k の個数は0～21の22個．したがって，自然数の組 $(x,\ y)$ の個数は**22個**．
(2)$3x+8y+7z=51$ から，$7z=51-3x-8y$　$x\geqq 1$，$y\geqq 1$ であるから，$7z\leqq 51-3\cdot 1-8\cdot 1=40$，$z\leqq\frac{40}{7}$
よって，$z=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
[1]$z=1$ のとき，$3x+8y=44$，$3x=44-8y$ から，$44-8y$ は正で，かつ3の倍数である．
よって，$y=1,\ 4$　ゆえに，$(x,\ y)=(12,\ 1),\ (4,\ 4)$
[2]$z=2$ のとき，$3x+8y=37$，$3x=37-8y$ から，[1]と同様にして，$y=2$　ゆえに，$(x,\ y)=(7,\ 2)$
[3]$z=3$ のとき，$3x+8y=30$，$3x=30-8y$ から，[1]と同様にして，$y=3$　ゆえに，$(x,\ y)=(2,\ 3)$
[4]$z=4$ のとき，$3x+8y=23$，$3x=23-8y$ から，[1]と同様にして，$y=1$　ゆえに，$(x,\ y)=(5,\ 1)$
[5]$z=5$ のとき，$3x+8y=16$　この等式を満たす自然数 x，y は存在しない．
以上から，**$(x,\ y,\ z)=(12,\ 1,\ 1),\ (4,\ 4,\ 1),\ (7,\ 2,\ 2),\ (2,\ 3,\ 3),\ (5,\ 1,\ 4)$**

6 (1)(左辺)$=x(y-3)+4(y-3)+12-26=(x+4)(y-3)-14$ より，方程式は，$(x+4)(y-3)=14$ と変形できる．
x，y は自然数だから $x+4\geqq5$，$y-3\geqq-2$　よって，$(x+4,\ y-3)=(7,\ 2),\ (14,\ 1)$
したがって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 5),\ (10,\ 4)}$

(2)(左辺)$=3x(2y+5)-(2y+5)+5-467=(3x-1)(2y+5)-462$ より，方程式は，$(3x-1)(2y+5)=462$ と変形できる．x，y は自然数だから $3x-1\geqq2$，$2y+5\geqq7$　また，$2y+5$ は奇数である．
よって，$(3x-1,\ 2y+5)=(2,\ 231),\ (6,\ 77),\ (14,\ 33),\ (22,\ 21),\ (42,\ 11),\ (66,\ 7)$
このうち，x が自然数となるのは，$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 113),\ (5,\ 14)}$

7 $73x+17y=n$ ……① とする．まず，$73x+17y=1$ ……② の解を考える．②より，$5x+17(4x+y)=1$
$(x,\ 4x+y)=(-10,\ 3)$ は解の1つだから，$(x,\ y)=(-10,\ 43)$ が②の解の1つで，$(x,\ y)=(-10n,\ 43n)$ が①の解の1つである．よって，①の解は，$x=17t-10n$，$y=-73t+43n$（t は整数）である．
ここで，$x\geqq0$，$y\geqq0$ より，$17t-10n\geqq0$，$-73t+43n\geqq0$　ゆえに，$\dfrac{10}{17}n\leqq t\leqq\dfrac{43}{73}n$ ……③
③を満たす整数 t が13個あればよいが，そのためには，少なくとも $\dfrac{43}{73}n-\dfrac{10}{17}n\geqq12$ ……④ でなければならない．これを解くと，$n\geqq14892$
ここで，$n=14892$ を③に代入すると，$8760\leqq t\leqq8772$ となり，これを満たす整数 t はちょうど13個あり，題意を満たす．よって，$\boldsymbol{n=14892}$
〔注〕④は必要条件にすぎないことに注意する．
④を満たしていても n の値によっては③を満たす t が12個だけの場合がある．
よって，最後に題意を満たすことを確認する必要がある．

8 m は5で割ると3余る数なので，m^{30} を5で割った余りは 3^{30} を5で割った余りに等しい．
$3^{30}=3^2\cdot3^{28}=9\cdot81^7$ で，$81=5\cdot16+1$ より，81^7，1^7 を5で割った余りは等しいので，3^{30} を5で割った余りは，$9\cdot1=5\cdot1+4$ より，4
同様に，m^{30} を7で割った余りは 4^{30} を7で割った余りに等しい．
$4^{30}=64^{10}$ で，$64=7\cdot9+1$ より，64^{10}，1^{10} を7で割った余りは等しいので，4^{30} を7で割った余りは1
m^{30} を11で割った余りは 7^{30} を11で割った余りに等しい．
$7^{30}=343^{10}$ で，$343=11\cdot31+2$ より，343^{10}，2^{10} を11で割った余りは等しい．$2^{10}=1024=11\cdot93+1$ より，7^{30} を11で割った余りは1
以上より，x，y，z を整数として，$m^{30}=5x+4$ ……①，$m^{30}=7y+1$ ……②，$m^{30}=11z+1$ ……③ のように表される．②，③より，$7y+1=11z+1$，$7y=11z$　よって，$y=11k$，$z=7k$（k は整数）より，
$m^{30}=77k+1$ ……④　①，④より，$5x+4=77k+1$，$77k-5x=3$，$(k,\ x)=(-1,\ -16)$ が解の1つだから，
$k=5l-1$，$x=77l-16$（l は整数）①に代入すると，$m^{30}=5(77l-16)+4=385(l-1)+309$
したがって，求める余りは**309**

9 (1)$1\leqq x\leqq y\leqq z$ より，$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$，$1\leqq\dfrac{3}{x}$，$x\leqq3$ だから，$x=1,\ 2,\ 3$

(i)$x=1$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$　これを満たす自然数 y，z は存在しない．

(ii)$x=2$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$，$yz-2y-2z=0$，$(y-2)(z-2)=4$　$2\leqq y\leqq z$ より，$z-2\geqq y-2\geqq0$ だから，
$(y-2,\ z-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2)$　よって，$(y,\ z)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$

(iii)$x=3$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$，$2yz-3y-3z=0$，$4yz-6y-6z=0$，$2y(2z-3)-3(2z-3)-9=0$，
$(2y-3)(2z-3)=9$　$3\leqq y\leqq z$ より，$2z-3\geqq2y-3\geqq3$ だから，$(2y-3,\ 2z-3)=(3,\ 3)$，$(y,\ z)=(3,\ 3)$
したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)}$

(2)条件より，$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=k-l-m-n$，$k$，$l$，$m$，$n$ は自然数であるから，右辺の $k-l-m-n$ は整数である．また，左辺は正の数である．このことから，$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ は自然数であることがわかる．
l，m，n は自然数であるから，$\dfrac{1}{l}\leqq1$，$\dfrac{1}{m}\leqq1$，$\dfrac{1}{n}\leqq1$　よって，$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\leqq3$
したがって，$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1,\ 2,\ 3$　以下，$l\leqq m\leqq n$ として考える．

(i)$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ のとき，(1)の結果より，$(l,\ m,\ n)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

(ii)$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=2$ のとき，$l\leqq m\leqq n$ から，$2=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}=\dfrac{3}{l}$，$l\leqq\dfrac{3}{2}$，$l=1$
よって，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$，$mn-m-n=0$，$(m-1)(n-1)=1$
$1\leqq m\leqq n$ より，$n-1\geqq m-1\geqq0$ だから，$(m-1,\ n-1)=(1,\ 1)$
よって，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 2,\ 2)$

(iii)$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=3$ のとき，$3=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}=\dfrac{3}{l}$ より，$l\leqq1$，$l=1$
よって，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=2$，$2mn-m-n=0$，$4mn-2m-2n=0$，$(2m-1)(2n-1)=1$
$1\leqq m\leqq n$ より，$2n-1\geqq2m-1\geqq1$ だから，$(2m-1,\ 2n-1)=(1,\ 1)$
よって，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 1)$
(i)～(iii)より，$l\leqq m\leqq n$ のとき　$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$
したがって，自然数の組$(l,\ m,\ n,\ k)$は，$1+\dfrac{3!}{2!}+3!+\dfrac{3!}{2!}+1=$**14(個)**

3　整数の性質の活用

P115

1 (1)38　(2)109　(3)50　(4)178　(5)242　(6)1756　(7)243　(8)503

2 (1)$1010111_{(2)}$　(2)$11001001_{(2)}$　(3)$20222_{(3)}$　(4)$21213_{(4)}$　(5)$3124_{(5)}$　(6)$6431_{(7)}$

3 (1)$165_{(n)}$ を10進法で表すと，$1\cdot n^2+6\cdot n+5=n^2+6n+5\ (n\geqq7)$ なので，$n^2+6n+5=117$
よって，$n^2+6n-112=0$，$(n-8)(n+14)=0$　$n\geqq7$ より，$\boldsymbol{n=8}$
(2)$324_{(n)}$ を10進法で表すと，$3\cdot n^2+2\cdot n+4=3n^2+2n+4\ (n\geqq5)$ なので，$3n^2+2n+4=89$
よって，$3n^2+2n-85=0$，$(3n+17)(n-5)=0$　$n\geqq5$ より，$\boldsymbol{n=5}$

4 (1)$20110_{(3)}\rightarrow174\rightarrow\boldsymbol{10101110_{(2)}}$　(2)$4103_{(5)}\rightarrow528\rightarrow\boldsymbol{1020_{(8)}}$　(3)$1550_{(6)}\rightarrow426\rightarrow\boldsymbol{1146_{(7)}}$

P116

5 (1)$0.011_{(2)}=0\cdot\dfrac{1}{2}+1\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}=0.25+0.125=\boldsymbol{0.375}$

(2)$0.1011_{(2)}=1\cdot\dfrac{1}{2}+0\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}+1\cdot\dfrac{1}{2^4}=0.5+0.125+0.0625=\boldsymbol{0.6875}$

(3)$0.23_{(4)}=2\cdot\dfrac{1}{4}+3\cdot\dfrac{1}{4^2}=0.5+0.1875=\boldsymbol{0.6875}$　(4)$0.43_{(5)}=4\cdot\dfrac{1}{5}+3\cdot\dfrac{1}{5^2}=0.8+0.12=\boldsymbol{0.92}$

(5)$0.144_{(5)}=1\cdot\dfrac{1}{5}+4\cdot\dfrac{1}{5^2}+4\cdot\dfrac{1}{5^3}=0.2+0.16+0.032=\boldsymbol{0.392}$　(6)$0.64_{(8)}=6\cdot\dfrac{1}{8}+4\cdot\dfrac{1}{8^2}=0.75+0.0625=\boldsymbol{0.8125}$

6 (1)$0.625=\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots\cdots$　両辺を2倍して，$1.25=a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{2^2}+\cdots\cdots$　整数部分を比較して，$a_1=1$
$0.25=\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{2^2}+\dfrac{a_4}{2^3}+\cdots\cdots$　両辺を2倍して，$0.5=a_2+\dfrac{a_3}{2}+\dfrac{a_4}{2^2}+\cdots\cdots$　整数部分を比較して，$a_2=0$
$0.5=\dfrac{a_3}{2}+\dfrac{a_4}{2^2}+\dfrac{a_5}{2^3}+\cdots\cdots$　両辺を2倍して，$1=a_3+\dfrac{a_4}{2}+\dfrac{a_5}{2^2}+\cdots\cdots$　両辺を比較して，$a_3=1$，
$a_4=a_5=\cdots\cdots=0$　以上より，$0.625=\boldsymbol{0.101_{(2)}}$

(2)$0.9375=\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4^2}+\frac{a_3}{4^3}+\cdots\cdots$　両辺を4倍して，$3.75=a_1+\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{4^2}+\cdots\cdots$　整数部分を比較して，$a_1=3$

$0.75=\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{4^2}+\frac{a_4}{4^3}+\cdots\cdots$　両辺を4倍して，$3=a_2+\frac{a_3}{4}+\frac{a_4}{4^2}+\cdots\cdots$　両辺を比較して，$a_2=3$，

$a_3=a_4=\cdots\cdots=0$　以上より，$0.9375=\mathbf{0.33_{(4)}}$

(3)$0.688=\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\cdots\cdots$　両辺を5倍して，$3.44=a_1+\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\cdots\cdots$　整数部分を比較して，$a_1=3$

$0.44=\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\frac{a_4}{5^3}+\cdots\cdots$　両辺を5倍して，$2.2=a_2+\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\cdots\cdots$　整数部分を比較して，$a_2=2$

$0.2=\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\frac{a_5}{5^3}+\cdots\cdots$　両辺を5倍して，$1=a_3+\frac{a_4}{5}+\frac{a_5}{5^2}+\cdots\cdots$　両辺を比較して，$a_3=1$，

$a_4=a_5=\cdots\cdots=0$　以上より，$0.688=\mathbf{0.321_{(5)}}$

(4)$0.875=\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{6^2}+\frac{a_3}{6^3}+\cdots\cdots$　両辺を6倍して，$5.25=a_1+\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{6^2}+\cdots\cdots$　整数部分を比較して，$a_1=5$

$0.25=\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{6^2}+\frac{a_4}{6^3}+\cdots\cdots$　両辺を6倍して，$1.5=a_2+\frac{a_3}{6}+\frac{a_4}{6^2}+\cdots\cdots$　整数部分を比較して，$a_2=1$

$0.5=\frac{a_3}{6}+\frac{a_4}{6^2}+\frac{a_5}{6^3}+\cdots\cdots$　両辺を6倍して，$3=a_3+\frac{a_4}{6}+\frac{a_5}{6^2}+\cdots\cdots$　両辺を比較して，$a_3=3$，

$a_4=a_5=\cdots\cdots=0$　以上より，$0.875=\mathbf{0.513_{(6)}}$

P117

7　$4x2_{(5)}$の各位の数は0以上4以下の整数であるから，$0\leqq x\leqq 4$
$22y_{(7)}$の各位の数は0以上6以下の整数であるから，$0\leqq y\leqq 6$
$4x2_{(5)}$と$22y_{(7)}$を10進法で表すと，$4x2_{(5)}=4\cdot5^2+x\cdot5^1+2\cdot5^0=5x+102$，$22y_{(7)}=2\cdot7^2+2\cdot7+y\cdot7^0=y+112$
よって，$5x+102=y+112$ であるから，$5x-10=y$，$y=5(x-2)$
yは5の倍数なので$y=0$または5　$y=0$のとき$x=2$，$y=5$のとき$x=3$
これらは$0\leqq x\leqq 4$を満たしている．
したがって，$\boldsymbol{x=2}$**，**$\boldsymbol{y=0}$**のとき，**$\boldsymbol{N=112}$　$\boldsymbol{x=3}$**，**$\boldsymbol{y=5}$**のとき，**$\boldsymbol{N=117}$

8　$abc_{(5)}$，$cba_{(8)}$が3桁の数であることから，$1\leqq a\leqq 4$，$0\leqq b\leqq 4$，$1\leqq c\leqq 4$である．
これらを10進法で表すと，$abc_{(5)}=a\cdot5^2+b\cdot5+c=25a+5b+c$，$cba_{(8)}=c\cdot8^2+b\cdot8+a=64c+8b+a$
よって，$25a+5b+c=64c+8b+a$，$24a-3b=63c$，$8a-b=21c$
$1\leqq a\leqq 4$，$0\leqq b\leqq 4$より，$4\leqq 8a-b\leqq 32$なので，$21c=21$，$c=1$
このとき，$b=8a-21$　$0\leqq b\leqq 4$から，$a=3$，$b=3$
したがって，$N=25\cdot3+5\cdot3+1=\mathbf{91}$

9　2進数を表す$_{(2)}$は省略する．

(1) $\begin{array}{r} 1101 \\ +1001 \\ \hline \mathbf{10110} \end{array}$　(2) $\begin{array}{r} 1011 \\ +1110 \\ \hline \mathbf{11001} \end{array}$　(3) $\begin{array}{r} 10011 \\ +11101 \\ \hline \mathbf{110000} \end{array}$　(4) $\begin{array}{r} 1010 \\ +\ 111 \\ \hline \mathbf{10001} \end{array}$　(5) $\begin{array}{r} 1101 \\ +\ 101 \\ \hline \mathbf{10010} \end{array}$　(6) $\begin{array}{r} 11110 \\ +\ 1111 \\ \hline \mathbf{101101} \end{array}$

(7) $\begin{array}{r} 1010 \\ -\ 101 \\ \hline \mathbf{101} \end{array}$　(8) $\begin{array}{r} 1101 \\ -\ 111 \\ \hline \mathbf{110} \end{array}$　(9) $\begin{array}{r} 11011 \\ -\ 1101 \\ \hline \mathbf{1110} \end{array}$　(10) $\begin{array}{r} 10100 \\ -\ 1011 \\ \hline \mathbf{1001} \end{array}$　(11) $\begin{array}{r} 10011 \\ -\ 1101 \\ \hline \mathbf{110} \end{array}$　(12) $\begin{array}{r} 110101 \\ -\ 11011 \\ \hline \mathbf{11010} \end{array}$

10　2進数を表す$_{(2)}$は省略する．

(1) $\begin{array}{r} 101 \\ \times111 \\ \hline 101 \\ 101 \\ 101 \\ \hline \mathbf{100011} \end{array}$　(2) $\begin{array}{r} 110 \\ \times101 \\ \hline 110 \\ 110 \\ \hline \mathbf{11110} \end{array}$　(3) $\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ 110 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline \mathbf{1001110} \end{array}$

(4) $\begin{array}{r} \mathbf{11} \\ 101\,\overline{)\,1111} \\ 101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 0 \end{array}$　(5) $\begin{array}{r} \mathbf{111} \\ 11\,\overline{)\,10101} \\ 11 \\ \hline 100 \\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 0 \end{array}$　(6) $\begin{array}{r} \mathbf{1010} \\ 101\,\overline{)\,110010} \\ 101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 0 \end{array}$

P118

11　(1)$332_{(4)}+313_{(4)}=\mathbf{1311_{(4)}}$　(2)$322_{(4)}\times2_{(4)}=\mathbf{1310_{(4)}}$　(3)$231_{(4)}+132_{(4)}\times2_{(4)}=231_{(4)}+330_{(4)}=\mathbf{1221_{(4)}}$

12　加法，乗法の表は右のようになる．
(1)$342_{(5)}+123_{(5)}=\mathbf{1020_{(5)}}$
(2)$234_{(5)}\times23_{(5)}=234_{(5)}\times3_{(5)}+234_{(5)}\times20_{(5)}$
$=1312_{(5)}+10230_{(5)}=\mathbf{12042_{(5)}}$
(3)$322_{(5)}+213_{(5)}\times2_{(5)}=322_{(5)}+431_{(5)}=\mathbf{1303_{(5)}}$

＋	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

13　(1)$0.4\dot{6}$　(2)$2.\dot{8}$　(3)$0.\dot{3}\dot{9}$　(4)$2.\dot{1}6\dot{2}$

14　(1)$x=0.\dot{6}$とすると，$10x=6.\dot{6}$だから，$10x-x=6$より，$x=\frac{6}{9}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(2)$x=0.\dot{4}\dot{5}$とすると，$100x=45.\dot{4}\dot{5}$だから，$100x-x=45$より，$x=\frac{45}{99}=\boldsymbol{\frac{5}{11}}$

(3)$x=2.\dot{1}\dot{7}$とすると，$100x=217.\dot{1}\dot{7}$だから，$100x-x=215$より，$x=\boldsymbol{\frac{215}{99}}$

(4)$x=0.\dot{5}3\dot{1}$とすると，$1000x=531.\dot{5}3\dot{1}$だから，$1000x-x=531$より，$x=\frac{531}{999}=\boldsymbol{\frac{59}{111}}$

P119

15　(1)$\frac{7}{27}=0.\dot{2}5\dot{9}$　$50=3\cdot16+2$より，$\mathbf{5}$

(2)$\frac{25}{101}=0.\dot{2}47\dot{5}$　$30=4\cdot7+2$より，$\mathbf{4}$

(3)$\frac{5}{7}=0.\dot{7}1428\dot{5}$　$100=6\cdot16+4$より，$\mathbf{2}$

16　$\frac{6}{7}=0.\dot{8}5714\dot{2}$　$1000=6\cdot166+4$より，小数第1000位までに出てくるすべての数の和は，
$(8+5+7+1+4+2)\cdot166+(8+5+7+1)=27\cdot166+21=4482+21=\mathbf{4503}$

17　(1)$64=2^6$より，**有限小数**　(2)$160=2^5\cdot5$より，**有限小数**　(3)$75=3\cdot5^2$より，**有限小数でない**
(4)$110=2\cdot5\cdot11$より，**有限小数でない**　(5)$\frac{21}{240}=\frac{7}{80}$，$80=2^4\cdot5$より，**有限小数**

18　nの素因数が2または5だけのとき，$\frac{1}{n}$は有限小数となる．$n=2^p\cdot5^q$とすると，$2\leqq n\leqq 50$であるような0以上の整数の組$(p,\ q)$は，$(p,\ q)=(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(5,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 1)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 2)$の11通り．よって，**11個**ある．

19　整数を，6で割ったときの余り0，1，2，3，4，5によって6つの集まりに分類する．異なる7個の整数を6つの集まりに振り分けていくと，部屋割り論法により，2個以上の整数が入る集まりが少なくとも1つ存在する．したがって，異なる7個の整数の中には6で割ったときの余りが等しい2個の整数の組，すなわち，差が6の倍数となるような2個の整数の組が必ず含まれている．

20　整数をnで割った余りは，0，1，2，3，……，$n-1$のn通りであるが，$\frac{m}{n}$が有限小数でないならば，mから始めて割り算を繰り返したとき，余りとして考えられるのは，高々1，2，3，……，$n-1$の$(n-1)$通りである．よって，n回目の割り算までにはそれまでに出てきた余りと同じ余りが必ず現れ，その後の割り算はその間の計算の繰り返しとなる．よって，循環小数となる．

P120

21　(1)$\frac{1}{10}=\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\cdots\cdots$の両辺を5倍すると，$\frac{1}{2}=a_1+\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\cdots\cdots$だから，$a_1=0$

よって，$\frac{1}{2}=\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\frac{a_4}{5^3}+\cdots\cdots$　両辺を5倍すると，$2+\frac{1}{2}=a_2+\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\cdots\cdots$となるから，$a_2=2$

以下同様にして，$a_3=a_4=\cdots\cdots=2$が成り立つ．よって，$\frac{1}{10}=\mathbf{0.0\dot{2}_{(5)}}$

(2) $\frac{1}{4}=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots\cdots$ の両辺を3倍すると，$\frac{3}{4}=a_1+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots\cdots$ だから，$a_1=0$

よって，$\frac{3}{4}=\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3^2}+\frac{a_4}{3^3}+\cdots\cdots$ 両辺を3倍すると，$2+\frac{1}{4}=a_2+\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{3^2}+\cdots\cdots$ より，$a_2=2$

よって，$\frac{1}{4}=\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{3^2}+\frac{a_5}{3^3}+\cdots\cdots$

以下同様にして，$a_3=a_5=\cdots\cdots=0$，$a_4=a_6=\cdots\cdots=2$ が成り立つ．よって，$\frac{1}{4}=\mathbf{0.\dot{0}\dot{2}_{(3)}}$

(3) $\frac{3}{8}=\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\cdots\cdots$ の両辺を5倍すると，$1+\frac{7}{8}=a_1+\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\cdots\cdots$ だから，$a_1=1$ 同様にして，

$\frac{7}{8}=\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\frac{a_4}{5^3}+\cdots\cdots$，$4+\frac{3}{8}=a_2+\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\cdots\cdots$ だから，$a_2=4$ よって，$\frac{3}{8}=\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\frac{a_5}{5^3}+\cdots\cdots$

以下同様にして，$a_3=a_5=\cdots\cdots=1$，$a_4=a_6=\cdots\cdots=4$ が成り立つ．よって，$\frac{3}{8}=\mathbf{0.\dot{1}\dot{4}_{(5)}}$

(4) $\frac{5}{18}=\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{6^2}+\frac{a_3}{6^3}+\cdots\cdots$ の両辺を6倍すると，$1+\frac{2}{3}=a_1+\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{6^2}+\cdots\cdots$ だから，$a_1=1$

同様にして，$\frac{2}{3}=\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{6^2}+\frac{a_4}{6^3}+\cdots\cdots$，$4=a_2+\frac{a_3}{6}+\frac{a_4}{6^2}+\cdots\cdots$ だから，$a_2=4$

よって，$0=\frac{a_3}{6}+\frac{a_4}{6^2}+\frac{a_5}{6^3}+\cdots\cdots$ から，$a_3=a_4=a_5=\cdots\cdots=0$ したがって，$\frac{5}{18}=\mathbf{0.14_{(6)}}$

22 (1) $\left[\frac{5}{6}\right]=\mathbf{0}$ (2) $\left[-\frac{19}{6}\right]=\mathbf{-4}$

(3) $6<2\pi<7$ より，$\frac{1}{6}<\frac{2\pi-5}{6}<\frac{1}{3}$ だから，$\left[\frac{2\pi-5}{6}\right]=\mathbf{0}$

(4) $2<2\sqrt{2}<3$ より，$-\frac{1}{2}<\frac{2\sqrt{2}-5}{6}<-\frac{1}{3}$ だから，$\left[\frac{2\sqrt{2}-5}{6}\right]=\mathbf{-1}$

23 (1) $[2x+3]=-3$ より，$-3\leqq 2x+3<-2$，$-6\leqq 2x<-5$，$\boldsymbol{-3\leqq x<-\frac{5}{2}}$

(2) $\left[\frac{3x+1}{2}\right]=5$ より，$5\leqq\frac{3x+1}{2}<6$，$10\leqq 3x+1<12$，$\boldsymbol{3\leqq x<\frac{11}{3}}$

(3) $\begin{cases}2[x]-3[y]=14\\3[x]+2[y]=8\end{cases}$ より，$[x]=4$，$[y]=-2$ よって，$\boldsymbol{4\leqq x<5}$，$\boldsymbol{-2\leqq y<-1}$

24 $[a]=3$ より，$3\leqq a<4$，$6\leqq 2a<8$ $[b]=1$ より，$1\leqq b<2$，$-6<-3b\leqq-3$
よって，$0<2a-3b<5$ より，$[2a-3b]=\mathbf{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4}$

P121 〔混合問題〕

1 (1) $121022_{(3)}=1\cdot3^5+2\cdot3^4+1\cdot3^3+0\cdot3^2+2\cdot3^1+2\cdot3^0=243+162+27+0+6+2=\mathbf{440}$

(2) $31442_{(5)}=3\cdot5^4+1\cdot5^3+4\cdot5^2+4\cdot5^1+2\cdot5^0=1875+125+100+20+2=\mathbf{2122}$

(3) $1.1011_{(2)}=1+1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2^2}+1\cdot\frac{1}{2^3}+1\cdot\frac{1}{2^4}=1+0.5+0.125+0.0625=\mathbf{1.6875}$

(4) $0.312_{(4)}=3\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4^2}+2\cdot\frac{1}{4^3}=\frac{3}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{27}{32}=\mathbf{0.84375}$

2 計算方法は右のとおり．
(1) $2021_{(4)}$ (2) $20433_{(5)}$
(3) $0.402_{(5)}$ (4) $0.043_{(6)}$

(1)
$$\begin{array}{r|l}4 & 137\\ \hline 4 & 34\cdots1\\ \hline 4 & 8\cdots2\\ \hline 4 & 2\cdots0\\ \hline & 0\cdots2\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r|l}5 & 1368\\ \hline 5 & 273\cdots3\\ \hline 5 & 54\cdots3\\ \hline 5 & 10\cdots4\\ \hline 5 & 2\cdots0\\ \hline & 0\cdots2\end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r}0.816\\ \times\ \ 5\\ \hline 4.080\\ \times\ \ 5\\ \hline 0.40\\ \times\ \ 5\\ \hline 2.0\end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r}0.125\\ \times\ \ 6\\ \hline 0.750\\ \times\ \ 6\\ \hline 4.50\\ \times\ \ 6\\ \hline 3.0\end{array}$$

3 2進数を表す $_{(2)}$ は省略する．

(1)
$$\begin{array}{r}110111\\ +111010\\ \hline \mathbf{1110001}\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r}11110\\ -\ 1101\\ \hline \mathbf{10001}\end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r}101010\\ -\ 11101\\ \hline \mathbf{1101}\end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r}11011\\ \times\ \ 110\\ \hline 11011\ \\ 11011\ \ \\ \hline \mathbf{10100010}\end{array}$$

(5)
$$\begin{array}{r}11010\\ \times\ \ 111\\ \hline 11010\\ 11010\ \\ 11010\ \ \\ \hline \mathbf{10110110}\end{array}$$

(6)
$$\begin{array}{r}\mathbf{111}\\ 1011\,\overline{)\,1001101}\\ 1011\ \ \\ \hline 10000\ \\ 1011\ \\ \hline 1011\\ 1011\\ \hline 0\end{array}$$

4 (1) $3201_{(4)}=3\cdot4^3+2\cdot4^2+0\cdot4^1+1\cdot4^0=192+32+1=225$
$1312_{(4)}=1\cdot4^3+3\cdot4^2+1\cdot4^1+2\cdot4^0=64+48+4+2=118$
$225-118=107=\mathbf{1223_{(4)}}$

(2) $202011_{(3)}=2\cdot3^5+0\cdot3^4+2\cdot3^3+0\cdot3^2+1\cdot3^1+1\cdot3^0=486+54+3+1=544$
$122_{(3)}=1\cdot3^2+2\cdot3^1+2\cdot3^0=9+6+2=17$
$544\div17=32=\mathbf{1012_{(3)}}$

(1)
$$\begin{array}{r|l}4 & 107\\ \hline 4 & 26\cdots3\\ \hline 4 & 6\cdots2\\ \hline 4 & 1\cdots2\\ \hline & 0\cdots1\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r|l}3 & 32\\ \hline 3 & 10\cdots2\\ \hline 3 & 3\cdots1\\ \hline 3 & 1\cdots0\\ \hline & 0\cdots1\end{array}$$

5 (1)［10進法］ $\frac{7}{24}=\mathbf{0.291\dot{6}}$

［6進法］ $\frac{7}{24}=\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{6^2}+\frac{a_3}{6^3}+\cdots\cdots$ の両辺を6倍すると，$1+\frac{3}{4}=a_1+\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{6^2}+\cdots\cdots$ だから，$a_1=1$，

$\frac{3}{4}=\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{6^2}+\frac{a_4}{6^3}+\cdots\cdots$ 同様にして，$4+\frac{1}{2}=a_2+\frac{a_3}{6}+\frac{a_4}{6^2}+\cdots\cdots$ より，$a_2=4$，$\frac{1}{2}=\frac{a_3}{6}+\frac{a_4}{6^2}+\frac{a_5}{6^3}+\cdots\cdots$

同様にして，$3=a_3+\frac{a_4}{6}+\frac{a_5}{6^2}+\cdots\cdots$ より，$a_3=3$ よって，$0=\frac{a_4}{6}+\frac{a_5}{6^2}+\frac{a_6}{6^3}+\cdots\cdots$ から，

$a_4=a_5=\cdots\cdots=0$ したがって，$\frac{7}{24}=\mathbf{0.143_{(6)}}$

(2)［10進法］ $\frac{5}{9}=\mathbf{0.\dot{5}}$

［7進法］ $\frac{5}{9}=\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\cdots\cdots$ の両辺を7倍すると，$3+\frac{8}{9}=a_1+\frac{a_2}{7}+\frac{a_3}{7^2}+\cdots\cdots$ だから，$a_1=3$，

$\frac{8}{9}=\frac{a_2}{7}+\frac{a_3}{7^2}+\frac{a_4}{7^3}+\cdots\cdots$ 同様にして，$6+\frac{2}{9}=a_2+\frac{a_3}{7}+\frac{a_4}{7^2}+\cdots\cdots$ より，$a_2=6$，$\frac{2}{9}=\frac{a_3}{7}+\frac{a_4}{7^2}+\frac{a_5}{7^3}+\cdots\cdots$

同様にして，$1+\frac{5}{9}=a_3+\frac{a_4}{7}+\frac{a_5}{7^2}+\cdots\cdots$ より，$a_3=1$，$\frac{5}{9}=\frac{a_4}{7}+\frac{a_5}{7^2}+\frac{a_6}{7^3}+\cdots\cdots$ 以下同様にして，

$a_4=a_7=a_{10}=\cdots\cdots=3$，$a_5=a_8=a_{11}=\cdots\cdots=6$，$a_6=a_9=a_{12}=\cdots\cdots=1$ が成り立つ．したがって，$\frac{5}{9}=\mathbf{0.\dot{3}6\dot{1}_{(7)}}$

6 (1) $[x]^2+2[x]-24=0$ より，$([x]+6)([x]-4)=0$，$[x]=-6,\ 4$ よって，$\boldsymbol{-6\leqq x<-5}$，$\boldsymbol{4\leqq x<5}$

(2) $[x][2x+1]=3$ より，(i) $[x]=1$ かつ $[2x+1]=3$，(ii) $[x]=3$ かつ $[2x+1]=1$，(iii) $[x]=-1$ かつ $[2x+1]=-3$，(iv) $[x]=-3$ かつ $[2x+1]=-1$ の場合がある．

(i)のとき，$1\leqq x<2$ かつ $3\leqq 2x+1<4$ よって，$1\leqq x<\frac{3}{2}$

(ii)のとき，$3\leqq x<4$ かつ $1\leqq 2x+1<2$ これを満たす実数 x は存在しない．

(iii)のとき，$-1\leqq x<0$ かつ $-3\leqq 2x+1<-2$ これを満たす実数 x は存在しない．

(iv)のとき，$-3\leqq x<-2$ かつ $-1\leqq 2x+1<0$ これを満たす実数 x は存在しない．

したがって，$\boldsymbol{1\leqq x<\frac{3}{2}}$

7 ある数を x とすると，$\frac{1}{4^{22}}\leqq x<\frac{1}{4^{21}}$ である．

$4^{21}=(4^3)^7=64^7=(8^2)^7=8^{14}$，$4^{22}=4\cdot4^{21}=4\cdot8^{14}$ より，$\frac{1}{4\cdot8^{14}}\leqq x<\frac{1}{8^{14}}$ $\frac{1}{8^{15}}<\frac{1}{4\cdot8^{14}}$ だから，$\frac{1}{8^{15}}<x<\frac{1}{8^{14}}$

よって，8進法では，0でない数字がはじめて現れるのは**小数第15位.**

⑧ Nはp進法で3桁の最大数だから，$N=(p-1)p^2+(p-1)p+p-1=p^3-1$　また，Nは$p\times q$進法で15なので，$N=1\cdot pq+5\ (pq\geqq 6)$ ……①と表すことができる．よって，$p^3-1=pq+5$ ……②，$pq\geqq 6$ ……③　②より，$p(p^2-q)=6$　pは2以上の自然数，qは自然数だから，$(p,\ p^2-q)=(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$
すなわち，$(p,\ q)=(2,\ 1),\ (3,\ 7),\ (6,\ 35)$　このうち，③を満たすものは，$(p,\ q)=(3,\ 7),\ (6,\ 35)$
したがって，①より，**$(N,\ p,\ q)=(26,\ 3,\ 7),\ (215,\ 6,\ 35)$**

⑨ 条件より，$N=3x+y+\frac{z}{3}+\frac{z}{3^2}+\frac{z}{3^3}+\cdots\cdots$　①，$N-1=5z+y+\frac{x}{5}+\frac{x}{5^2}+\frac{x}{5^3}+\cdots\cdots$　②
①から，$3N=9x+3y+z+\frac{z}{3}+\frac{z}{3^2}+\cdots\cdots$　①′　①′−①より，$2N=6x+2y+z$ ……③　同様に，②から，
$5N-5=25z+5y+x+\frac{x}{5}+\frac{x}{5^2}+\cdots\cdots$　②′　②′−②より，$4N-4=20z+4y+x$ ……④　③，④から，
$2(6x+2y+z)-4=20z+4y+x$，$12x+4y+2z-4=20z+4y+x$，$11x=2(9z+2)$　ここで，xは1か2，yは0か1か2，zは1か2であることに注意すると，11と2は互いに素なので，$x=2$　このとき，$z=1$　yはどれでもよい．したがって，**$(x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 1)$**

章末問題

P122 〔章末問題A〕

1 15!を素因数分解したときの素因数2の個数は，$7+3+1=11$(個)　素因数3の個数は，$5+1=6$(個)
素因数5の個数は3個，素因数7の個数は2個，素因数11，13の個数はそれぞれ1個ずつある．
よって，$15!=2^{11}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13$　したがって，15!の正の約数の個数は，
$(11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1)=12\cdot7\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=$**4032(個)**

2 $p^2-1=(p-1)(p+1)$　これが3の倍数であり，8の倍数でもあることを示す．
(i) pを3で割った余りで分類して考える．pは3より大きい素数なので，$p=3k$(kは自然数)と表されることはない．$p=3k+1$のとき，$p-1=3k$より，$p-1$が3の倍数．$p=3k+2$のとき，$p+1=3k+3=3(k+1)$より，$p+1$が3の倍数．以上より，p^2-1は3の倍数である．
(ii) pを2で割った余りで分類して考える．pは3より大きい素数なので，$p=2k$(kは自然数)と表されることはない．$p=2k+1$のとき，$p^2-1=(p-1)(p+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)$
$k(k+1)$は連続する2整数の積なので2の倍数．よって，p^2-1は8の倍数である．
(i)，(ii)より，p^2-1は，$3\times8=24$の倍数である．

3 整数解をもつと仮定して，これをαとする．このとき，αは$\alpha^3-\alpha^2+9\alpha-5=0$を満たしている．
よって，$\alpha(\alpha^2-\alpha+9)=5$　α，$\alpha^2-\alpha+9$は整数だから，αは5の約数であり，$\alpha=\pm1,\ \pm5$
ところが，このいずれも方程式$x^3-x^2+9x-5=0$の解ではない．したがって，方程式は整数解をもたない．

4 (1) $3696=1144\cdot3+264$，$1144=264\cdot4+88$，$264=88\cdot3$より，3696と1144の最大公約数は**88**
$3696=88\cdot42$，$1144=88\cdot13$より，最小公倍数は，$88\cdot42\cdot13=$**48048**
(2) $6321=1548\cdot4+129$，$1548=129\cdot12$より，1548と6321の最大公約数は129　$7826=129\cdot60+86$，
$129=86\cdot1+43$，$86=43\cdot2$より，129と7826の最大公約数は43　よって，3数の最大公約数は**43**　また，
$1548=43\cdot2^2\cdot3^2$，$6321=43\cdot3\cdot7^2$，$7826=43\cdot2\cdot7\cdot13$より，3数の最小公倍数は，$43\cdot2^2\cdot3^2\cdot7^2\cdot13=$**986076**

5 求める自然数をnとすると，nはx，y，zを整数として，$n=3x+1$ ……①，$n=5y+2$ ……②，
$n=11z+3$ ……③のように表される．①，②より，$3x+1=5y+2$，$3x-5y=1$　解の1つが$(x,\ y)=(2,\ 1)$だから，$x=5k+2$，$y=3k+1$(kは整数)　①に代入すると，$n=3x+1=3(5k+2)+1=15k+7$(kは整数)
……④　③，④より，$15k+7=11z+3$，$15k-11z=-4$　解の1つが$(k,\ z)=(-1,\ -1)$だから，
$k=11l-1$，$z=15l-1$(lは整数)　④に代入すると，$n=15(11l-1)+7=165l-8$(lは整数)
$165l-8<1000$より，$l<6\frac{6}{55}$であるから，求める整数は，$165\cdot6-8=$**982**

6 (1)
$$\begin{aligned}6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4&=6x^2+(y-5)x-2(y^2-3y+2)\\&=6x^2+(y-5)x-2(y-1)(y-2)\\&=\{3x+2(y-2)\}\{2x-(y-1)\}\\&=\boldsymbol{(3x+2y-4)(2x-y+1)}\end{aligned}$$

(2) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$，$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4=16$
(1)の結果より，$(3x+2y-4)(2x-y+1)=16$
x，yは自然数なので，$3x+2y-4$は自然数．よって，$2x-y+1$も自然数である．
したがって，$(3x+2y-4,\ 2x-y+1)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2),\ (16,\ 1)$
$3x+2y-4=a$，$2x-y+1=b$を解くと，$(x,\ y)=\left(\frac{a+2b+2}{7},\ \frac{2a-3b+11}{7}\right)$なので，$x$，$y$がともに自然数となるのは，$(a,\ b)=(4,\ 4),\ (8,\ 2)$の場合で，**$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (2,\ 3)$**

7 格子点$(x,\ y)$の偶奇の組み合わせは，(偶数，偶数)，(偶数，奇数)，(奇数，偶数)，(奇数，奇数)の4通りが考えられる．よって，5個の格子点を選ぶと，その中にx座標，y座標とも偶奇が一致する2点が少なくとも一対存在する．よって，この2点を結ぶ線分の中点が格子点となる．

8 $\frac{3}{4}=0.75$で，$0.75\times6=4.5$，$0.5\times6=3$より，$0.75=0.43_{(6)}$である．
$0.abc+0.cab=0.43$より，$b+c=6$ ……①であり，小数第2位へのくり上りがある．
(i)小数第1位へのくり上りがないとき，
$a+c=4$ ……②，$b+a+1=3$ ……③　①～③より，$a=0$，$b=2$，$c=4$
(ii)小数第1位へのくり上りがあるとき，
$a+c+1=4$ ……④，$b+a+1=9$ ……⑤　①，④，⑤より，$a=\frac{5}{2}$，$b=\frac{11}{2}$，$c=\frac{1}{2}$でこれは不適．
よって，$0.024_{(6)}=\frac{2}{6^2}+\frac{4}{6^3}=\frac{2}{27}$，$0.402_{(6)}=\frac{4}{6}+\frac{2}{6^3}=\frac{73}{108}$より，**$x=\frac{2}{27}$，$y=\frac{73}{108}$**

9 (1) $x=m+\alpha$(mは整数，$0\leqq\alpha<1$)と表すことができる．このとき，$[x]=m$より，$[x]+n=m+n$
また，nは整数なので，$[x+n]=[(m+\alpha)+n]=[(m+n)+\alpha]=m+n$
よって，$[x+n]=[x]+n$が成り立つ．
(2) (1)の結果より，$\left[2x+\frac{1}{3}\right]=\left[2x-\frac{2}{3}+1\right]=\left[2x-\frac{2}{3}\right]+1$が成り立つので，$\left[2x-\frac{2}{3}\right]=X$とおくと，
$\left[2x-\frac{2}{3}\right]^2-3\left[2x+\frac{1}{3}\right]=15$より，$X^2-3(X+1)=15$，$X^2-3X-18=0$，$(X+3)(X-6)=0$，$X=-3,\ 6$
よって，$-3\leqq 2x-\frac{2}{3}<-2$，$6\leqq 2x-\frac{2}{3}<7$　これを解くと，**$-\frac{7}{6}\leqq x<-\frac{2}{3}$，$\frac{10}{3}\leqq x<\frac{23}{6}$**

P123 〔章末問題B〕

1 (1) $1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9$，$4^2=16$，$5^2=25=17\cdot1+8$，$6^2=36=17\cdot2+2$，$7^2=49=17\cdot2+15$，$8^2=64=17\cdot3+13$，
$9^2=81=17\cdot4+13$，$10^2=100=17\cdot5+15$，$11^2=121=17\cdot7+2$，$12^2=144=17\cdot8+8$，$13^2=169=17\cdot9+16$，
$14^2=196=17\cdot11+9$，$15^2=225=17\cdot13+4$，$16^2=256=17\cdot15+1$より，求める数は，**6と11**
(2) $1974=17\cdot116+2$なので，与式より，$x^2+17y=17\cdot116+2$，$x^2=17(116-y)+2$
x^2は17で割って2余る数だから，(1)より，xは17で割って6または11余る数である．
また，$y\geqq1$より，$x^2=1974-17y\leqq1957$　xは自然数だから，$1\leqq x\leqq44$　よって，$x=6,\ 11,\ 23,\ 28,\ 40$
これらを$y=\frac{1974-x^2}{17}$に代入して，**$(x,\ y)=(6,\ 114),\ (11,\ 109),\ (23,\ 85),\ (28,\ 70),\ (40,\ 22)$**

2 $a^2-a=a(a-1)$が$10000=2^4\cdot5^4$の倍数であるとき，aは奇数，$a-1$とaは連続する2整数なのでともに5の倍数になることはない．よって，$a=5^4k$，$a-1=2^4l$(k，lは自然数)と表すことができる．
aを消去すると，$5^4k-1=2^4l$，$625k-16l=1$ ………①
これより，$(16\cdot39+1)k-16l=1$，$16(39k-l)+k=1$
$(39k-l,\ k)=(0,\ 1)$は方程式を満たすので，$(k,\ l)=(1,\ 39)$は①の解の1つである．
よって，$k=16n+1$，$l=625n+39$(nは0以上の整数)
したがって，$a=5^4k=625(16n+1)=10000n+625$より，**$a=625$**

3 $pa+qb$ と $ra+sb$ が互いに素でないと仮定し，最大公約数を g $(g\geqq 2)$ とする．
このとき，$pa+qb=kg$ ……①，$ra+sb=lg$ ……②（k，l は互いに素な自然数）と表すことができる．
①$\times s-$②$\times q$ より，$(ps-qr)a=(ks-lq)g$　$ps-qr=1$ なので，$a=(ks-lq)g$ ……③
また，②$\times p-$①$\times r$ より，$(ps-qr)b=(lp-kr)g$　$ps-qr=1$ なので，$b=(lp-kr)g$ ……④
③，④は a，b が互いに素であることに矛盾する．よって，$pa+qb$ と $ra+sb$ は互いに素である．
したがって，$\dfrac{pa+qb}{ra+sb}$ は既約分数である．

4 (1)$15^{32}=225^{16}$ で，$225=37\cdot 6+3$ より，225^{16}，3^{16}を37で割った余りは等しい．
$3^{16}=81^{4}$ で，$81=37\cdot 2+7$ より，81^{4}，7^{4}を37で割った余りは等しい．
$7^{4}=2401=37\cdot 64+33$ より，求める余りは**33**
(2)$15^{64}=(15^{32})^{2}$ だから，(1)より，15^{64}，33^{2}を37で割った余りは等しい．
$33^{2}=1089=37\cdot 29+16$ より，15^{64}を37で割った余りは16である．
また，15^{63}を37で割った余りを r とすると，自然数 p を用いて，$15^{63}=37p+r$ と表せる．
よって，$15^{64}=15\cdot 37p+15r$ より，$15r$を37で割った余りが16だから，自然数 q を用いて，$15r=37q+16$ と表せる．よって，$15r-37q=16$ ……①　これを変形して，$15(r-2q)-7q=16$
$(r-2q,\ q)=(2,\ 2)$ はこれを満たすから，①の解の１つは，$(r,\ q)=(6,\ 2)$ であり，①の解は，
$r=37t+6$，$q=15t+2$（t は０以上の整数）である．ここで，$0\leqq r\leqq 36$ であるから，適するのは，$r=6$
すなわち，求める余りは**6**

5 (1)$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=ab\cdot bc\cdot ca-(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)+(ab+bc+ca)-1$
$=(abc)^{2}-abc(a+b+c)+ab+bc+ca-1$
これを利用すると，$ab+bc+ca-1=(ab-1)(bc-1)(ca-1)+abc(a+b+c-abc)$
よって，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ がabcで割り切れることから，$ab+bc+ca-1$ はabcで割り切れる．
(2)(1)の結果から，自然数kが存在して，$ab+bc+ca-1=kabc$ ……① が成り立つ．
$1<a<b<c$ から，$ab+bc+ca-1<ab+bc+ca<cb+bc+cb=3bc$ なので，$kabc<3bc$，$ka<3$，
$(k,\ a)=(1,\ 2)$　このとき，①より，$2b+bc+2c-1=2bc$，$bc-2b-2c+1=0$，$(b-2)(c-2)=3$
$2<b<c$ から，$0<b-2<c-2$ なので，$(b-2,\ c-2)=(1,\ 3)$，$(b,\ c)=(3,\ 5)$
したがって，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 5)}$

6 (1)整数を n で割ったときの余りは，０，１，……，$n-1$ の n 通りある．
よって，$(n+1)$個の自然数を n で割ったとき，少なくとも２つの数の余りは一致する．
したがって，設問の $(n+1)$ 個の数について，n で割ったときの余りが等しい２数が存在する．
(2)(1)の $(n+1)$ 個の自然数のうち，余りが等しい i 桁と j 桁の２数を a_i，a_j $(1\leqq j<i\leqq n+1)$ とおく．
このとき，$a_i=\underbrace{111\cdots 11}_{i\text{ 桁}}=nq_i+r$，$a_j=\underbrace{111\cdots 1}_{j\text{ 桁}}=nq_j+r$（$q_i$，$q_j$は自然数，$0\leqq r<n-1$）と表すことができて，
$a_i-a_j=\underbrace{11\cdots 1\overbrace{00\cdots 0}^{0\text{ が } j\text{ 個}}}_{i\text{ 桁}}=n(q_i-q_j)$ より，$\underbrace{11\cdots 1}_{(i-j)\text{桁}}\times 10^{j}=n(q_i-q_j)$ が成り立つ．
n は２の倍数でも５の倍数でもないので，n と10^{j}は互いに素．よって，$\underbrace{11\cdots 1}_{(i-j)\text{桁}}$ が n の倍数である．
また，$1\leqq j<i\leqq n+1$ から，$1\leqq i-j\leqq n$ なので，これはn桁を超えない．
したがって，題意を満たす数が存在する．

7 (1)$12\cdot 67=804=11204_{(5)}$ より，$\boldsymbol{11204_{(5)}}$
(2)$2200044_{(5)}=2\cdot 5^{6}+2\cdot 5^{5}+4\cdot 5+4=37524$ より，$37524\div 12=$**3127（番目）**
(3)１番目から n 番目までの和は，$12\cdot 1+12\cdot 2+\cdots\cdots+12n=12(1+2+\cdots\cdots+n)=12\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=6n(n+1)$
ここで，$3127=100002_{(5)}=5^{5}+2$ だから，求める和は，$6(5^{5}+2)\{(5^{5}+2)+1\}=(5+1)(5^{5}+2)(5^{5}+3)$
$=(5+1)\{5^{10}+(2+3)5^{5}+6\}=(5+1)(5^{10}+5^{6}+5+1)=5^{11}+5^{10}+5^{7}+5^{6}+5^{2}+2\cdot 5+1$ より，$\boldsymbol{110011000121_{(5)}}$

補講　合同式

P124

1 [2]$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,m)$ より，$a-b$ はmで割り切れるので，$a-b=mp$（pは整数）……① と書ける．
同様に，$c\equiv d\ (\mathrm{mod}\,m)$ より，$c-d=mq$（qは整数）……② と書けるので，①$-$② から，
$(a-b)-(c-d)=mp-mq$，$(a-c)-(b-d)=m(p-q)$
よって，$a-c$，$b-d$ を m で割った余りが等しいので，$a-c\equiv b-d\ (\mathrm{mod}\,m)$
[3]①，②から，$a=b+mp$，$c=d+mq$
よって，$ac-bd=(b+mp)(d+mq)-bd=bmq+dmp+m^{2}pq=m(bq+dp+mpq)$
ac，bdを m で割った余りが等しいので，$ac\equiv bd\ (\mathrm{mod}\,m)$
[4]$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,m)$，$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,m)$ に[3]を用いると，$a^{2}\equiv b^{2}\ (\mathrm{mod}\,m)$
これと $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,m)$ に[3]を用いると，$a^{3}\equiv b^{3}\ (\mathrm{mod}\,m)$
同様にして，[3]を繰り返し用いると，$a^{k}\equiv b^{k}\ (\mathrm{mod}\,m)$ が得られる．

2 (1)成り立つ　(2)成り立たない　(3)成り立つ　(4)成り立たない　(5)成り立つ　(6)成り立つ

3 (1)-1，-4　(2)-4，-9　(3)-1，-5　(4)-4，-11　(5)-13，-30　(6)-12，-35

4 (1)13を法とすると，すべての整数は，$13n$，$13n+1$，……，$13n+12$（nは整数）と表されるが，$7\equiv -6$，
$8\equiv -5$，$9\equiv -4$，$10\equiv -3$，$11\equiv -2$，$12\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,13)$ だから，すべての整数は，$13n$，$13n\pm 1$，$13n\pm 2$，
$13n\pm 3$，$13n\pm 4$，$13n\pm 5$，$13n\pm 6$ とも表せる．よって，$\boxed{}=$**6**
(2)12を法とすると，すべての整数は，$12n$，$12n+1$，…，$12n+6$，…，$12n+11$（nは整数）と表されるが，
$7\equiv -5$，$8\equiv -4$，$9\equiv -3$，$10\equiv -2$，$11\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,12)$ だから，すべての整数は，$12n$，$12n\pm 1$，$12n\pm 2$，
$12n\pm 3$，$12n\pm 4$，$12n\pm 5$，$12n+6$ とも表せる．よって，$\boxed{\text{ア}}=$**5**，$\boxed{\text{イ}}=$**6**

P125

5 (1)$n\equiv 5\ (\mathrm{mod}\,13)$ より，$3n^{4}-7n^{2}\equiv 3\cdot 5^{4}-7\cdot 5^{2}\ (\mathrm{mod}\,13)$ が成り立つ．
$3\cdot 5^{4}-7\cdot 5^{2}=3\cdot 25^{2}-7\cdot 25$，$25=13\cdot 2-1$ より，$25\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,13)$ だから，
$3\cdot 25^{2}-7\cdot 25\equiv 3\cdot(-1)^{2}-7\cdot(-1)=10\ (\mathrm{mod}\,13)$　よって，求める余りは**10**
(2)$n\equiv 5\ (\mathrm{mod}\,13)$ より，$5n^{5}-3n^{3}+n^{2}\equiv 5\cdot 5^{5}-3\cdot 5^{3}+5^{2}\ (\mathrm{mod}\,13)$ が成り立つ．
$5\cdot 5^{5}-3\cdot 5^{3}+5^{2}=5^{6}-15\cdot 5^{2}+5^{2}=25^{3}-14\cdot 25\equiv(-1)^{3}-14\cdot(-1)=13\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,13)$　よって，求める余りは**0**

6 n は23で割って21余る整数なので，$21=23\cdot 1-2$ より，$n\equiv -2\ (\mathrm{mod}\,23)$
よって，$n^{5}+3n^{3}+n^{2}\equiv(-2)^{5}+3\cdot(-2)^{3}+(-2)^{2}=-52=23\cdot(-3)+17\equiv 17\ (\mathrm{mod}\,23)$ より，求める余りは**17**

7 (1)$3^{120}=9^{60}\equiv(-2)^{60}=2^{60}=2^{5\cdot 12}=32^{12}\equiv(-1)^{12}=1\ (\mathrm{mod}\,11)$ より，求める余りは**1**
(2)$6^{100}=36^{50}\equiv(-2)^{50}=(-2)^{4\cdot 12+2}=4\cdot 16^{12}\equiv 4\cdot(-3)^{12}=4\cdot 81^{3}\equiv 4\cdot 5^{3}=500\equiv 6\ (\mathrm{mod}\,19)$ より，求める余りは**6**
(3)$2012=7\cdot 287+3$ より，$2012\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,7)$
よって，$2012^{200}\equiv 3^{200}=9^{100}\equiv 2^{100}=2^{3\cdot 33+1}=2\cdot 8^{33}\equiv 2\cdot 1^{33}=2\ (\mathrm{mod}\,7)$
したがって，求める余りは**2**

8 (1)23は素数で，７と23は互いに素なので，フェルマーの小定理により，$7^{22}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,23)$
よって，$7^{1000}=7^{22\cdot 45+10}=(7^{22})^{45}\cdot 7^{10}\equiv 1^{45}\cdot 7^{10}=49^{5}\equiv 3^{5}=243\equiv 13\ (\mathrm{mod}\,23)$ より，求める余りは**13**
(2)17は素数で，22と17は互いに素なので，フェルマーの小定理により，$22^{16}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,17)$
よって，$22^{2200}=22^{16\cdot 137+8}=(22^{16})^{137}\cdot 22^{8}\equiv 1^{137}\cdot 22^{8}\equiv 5^{8}=25^{4}\equiv 8^{4}=64^{2}\equiv(-4)^{2}=16\ (\mathrm{mod}\,17)$ より，
求める余りは**16**

9 $640=5\cdot 2^{7}$ より，$5\cdot 2^{7}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,641)$ ……①　また，$2^{32}+1=16\cdot 2^{28}+1$ であり，$16\equiv -625=-5^{4}\ (\mathrm{mod}\,641)$
より，$2^{32}+1\equiv -5^{4}\cdot 2^{28}+1\ (\mathrm{mod}\,641)$　①より，$5^{4}\cdot 2^{28}\equiv(-1)^{4}=1\ (\mathrm{mod}\,641)$ だから，
$2^{32}+1\equiv -1+1=0\ (\mathrm{mod}\,641)$　よって，$2^{32}+1$ は641で割り切れる．

10 $3^{4n+2}+5^{2n+1}=3^{2}\cdot 3^{4n}+5\cdot 5^{2n}=9\cdot 81^{n}+5\cdot 25^{n}=9\cdot(14\cdot 5+11)^{n}+5\cdot(14\cdot 1+11)^{n}\equiv 9\cdot 11^{n}+5\cdot 11^{n}=14\cdot 11^{n}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,14)$
よって，n が自然数のとき，$3^{4n+2}+5^{2n+1}$ は14で割り切れる．

11 $a_1=21=3\cdot 7$，$a_2=329=7\cdot 47$ であるから，a_nのすべてを割り切る素数が存在するならばそれは７である．
$a_n=19^{n}+(-1)^{n-1}\cdot 2^{4(n-1)+1}=19^{n}+(-1)^{n-1}\cdot 16^{n-1}\cdot 2=19\cdot 19^{n-1}+2(-16)^{n-1}$　$19\equiv 5\ (\mathrm{mod}\,7)$，$-16\equiv 5\ (\mathrm{mod}\,7)$
なので，$a_n\equiv 19\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^{n-1}=21\cdot 5^{n-1}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,7)$　よって，求める素数は**7**

P126

12　2を法とする合同式で考える．(mod2は省略する．)　$f(x)=0$ が整数の解 α をもつと仮定する．このとき，$\alpha\equiv 0$ または $\alpha\equiv 1$ である．

[1]$\alpha\equiv 0$ のとき，a，b，c は整数なので，$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c\equiv a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=f(0)$　$f(\alpha)=0$ から，$f(0)\equiv 0$

[2]$\alpha\equiv 1$ のとき，同様に，$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c\equiv a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=f(1)$ より，$f(1)\equiv 0$

以上より，$f(0)\equiv 0$ または $f(1)\equiv 0$　これは，$f(0)$，$f(1)$ がともに奇数であることに矛盾する．

したがって，2次方程式 $f(x)=0$ は整数の解をもたない．

13　3を法とする合同式で考える．(mod3は省略する．)

[1]$p\equiv 0$ のとき，$ap^2+bp+c\equiv c$ なので，仮定より，$c\equiv 1$ ……①

$ap^4+bp^2+c\equiv c$ なので，仮定より，$c\equiv 2$ ……②　①，②は矛盾する．

[2]$p\equiv 1$ のとき，$ap^2+bp+c\equiv a+b+c$ なので，仮定より，$a+b+c\equiv 1$……③

$ap^4+bp^2+c\equiv a+b+c$ なので，仮定より，$a+b+c\equiv 2$ ……④　③，④は矛盾する．

[3]$p\equiv 2$ のとき，$ap^2+bp+c\equiv 4a+2b+c\equiv a+2b+c$ なので，仮定より，$a+2b+c\equiv 1$ ……⑤

$ap^4+bp^2+c\equiv 16a+4b+c\equiv a+b+c$ なので，仮定より，$a+b+c\equiv 2$ ……⑥　⑤－⑥より，$b\equiv -1$

したがって，b を3で割った余りは**2**である．

14　(1)$x\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3\ (\mathrm{mod}\,4)$ のいずれかが成り立つ．

$x\equiv 0$ のとき，$3x\equiv 0$　$x\equiv 1$ のとき，$3x\equiv 3$　$x\equiv 2$ のとき，$3x\equiv 6\equiv 2$　$x\equiv 3$ のとき，$3x\equiv 9\equiv 1$

よって，合同式の解は，$\boldsymbol{x\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,4)}$

(2)$x\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ (\mathrm{mod}\,5)$ のいずれかが成り立つ．

$x\equiv 0$ のとき，$3x\equiv 0$　$x\equiv 1$ のとき，$3x\equiv 3$　$x\equiv 2$ のとき，$3x\equiv 6\equiv 1$　$x\equiv 3$ のとき，$3x\equiv 9\equiv 4$

$x\equiv 4$ のとき，$3x\equiv 12\equiv 2$　よって，合同式の解は，$\boldsymbol{x\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,5)}$

(3)$x\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ (\mathrm{mod}\,7)$ のいずれかが成り立つ．

$x\equiv 0$ のとき，$5x\equiv 0$　$x\equiv 1$ のとき，$5x\equiv 5$　$x\equiv 2$ のとき，$5x\equiv 10\equiv 3$　$x\equiv 3$ のとき，$5x\equiv 15\equiv 1$

$x\equiv 4$ のとき，$5x\equiv 20\equiv 6$　$x\equiv 5$ のとき，$5x\equiv 25\equiv 4$　$x\equiv 6$ のとき，$5x\equiv 30\equiv 2$

よって，合同式の解は，$\boldsymbol{x\equiv 6\ (\mathrm{mod}\,7)}$

P127

※例題5の〔**注**〕の(ア)，(イ)の証明

(ア)$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,m)$ より，$a-b=mp$（p は整数）と書ける．

両辺に c を掛けて，$c(a-b)=cmp$，$ac-bc=m\cdot cp$

よって，ac，bc を m で割った余りが等しいので，$ac\equiv bc\ (\mathrm{mod}\,m)$

(イ)$ac\equiv bc\ (\mathrm{mod}\,m)$ より，$ac-bc=mp$（p は整数）と書ける．これより，$c(a-b)=mp$

ここで，c と m は互いに素だから，$a-b$ が m の倍数となる．

よって，a，b を m で割った余りが等しいので，$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,m)$

15　(1)$13x\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,7)$ ……①，$7x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,7)$ ……②　②×2－①より，$x\equiv -3\ (\mathrm{mod}\,7)$

すなわち，$\boldsymbol{x\equiv 4\ (\mathrm{mod}\,7)}$

(2)28と12の最大公約数は4だから，$7x\equiv 5\ (\mathrm{mod}\,3)$ ……①　また，$3x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$ ……②

①－②×2より，$x\equiv 5\ (\mathrm{mod}\,3)$　すなわち，$\boldsymbol{x\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,3)}$

(3)$23x\equiv 16\ (\mathrm{mod}\,5)$ ……①，$5x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,5)$ ……②　②×5－①より，$2x\equiv -16\ (\mathrm{mod}\,5)$

2と5は互いに素なので，$x\equiv -8\ (\mathrm{mod}\,5)$　すなわち，$\boldsymbol{x\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,5)}$

(4)45と20の最大公約数は5だから，$9x\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,4)$ ……①　また，$4x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4)$ ……②

①－②×2より，$\boldsymbol{x\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,4)}$

(5)$173x\equiv 16\ (\mathrm{mod}\,31)$ ……①，$31x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,31)$ ……②　①－②×5より，$18x\equiv 16\ (\mathrm{mod}\,31)$

2と31は互いに素なので，$9x\equiv 8\ (\mathrm{mod}\,31)$ ……③　②－③×3より，$4x\equiv -24\ (\mathrm{mod}\,31)$

4と31は互いに素なので，$x\equiv -6\ (\mathrm{mod}\,31)$　すなわち，$\boldsymbol{x\equiv 25\ (\mathrm{mod}\,31)}$

(6)618と258の最大公約数は6だから，$103x\equiv 18\ (\mathrm{mod}\,43)$ ……①　また，$43x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,43)$ ……②

①－②×2より，$17x\equiv 18\ (\mathrm{mod}\,43)$ ……③　①－③×6より，$x\equiv -90\ (\mathrm{mod}\,43)$

すなわち，$\boldsymbol{x\equiv 39\ (\mathrm{mod}\,43)}$

16　(1)$551x-14y=250$ ……①　$551x=14y+250$，$551=14\cdot 39+5$，$250=14\cdot 17+12$ より，$5x\equiv 12\ (\mathrm{mod}\,14)$ ……②

$14x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,14)$ ……③　②×3－③より，$x\equiv 36\equiv 8\ (\mathrm{mod}\,14)$ だから，$x=14t+8$（t は整数）

よって，①から，$14y=551x-250=551(14t+8)-250$，$y=551t+297$

以上より，$\boldsymbol{x=14t+8,\ y=551t+297}$（$\boldsymbol{t}$ **は整数**）

(2)$47x+238y=1000$ ……①　$238y=-47x+1000$，$238=47\cdot 5+3$，$1000=47\cdot 21+13$ より，

$3y\equiv 13\ (\mathrm{mod}\,47)$ ……②　$47y\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,47)$ ……③　②×16－③より，$y\equiv 208\equiv 20\ (\mathrm{mod}\,47)$ だから，

$y=47t+20$（t は整数）　よって，①から，$47x=-238y+1000=-238(47t+20)+1000$，$x=-238t-80$

以上より，$\boldsymbol{x=-238t-80,\ y=47t+20}$（$\boldsymbol{t}$ **は整数**）

(3)$32x+347y=820$ ……①　$347y=-32x+820$，$347=32\cdot 10+27$，$820=32\cdot 25+20$ より，

$27y\equiv 20\ (\mathrm{mod}\,32)$ ……②　$32y\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,32)$ ……③　③－②より，$5y\equiv -20\ (\mathrm{mod}\,32)$，$y\equiv -4\ (\mathrm{mod}\,32)$

だから，$y=32t-4$（t は整数）　よって，①から，$32x=-347y+820=-347(32t-4)+820$，

$x=-347t+69$　以上より，$\boldsymbol{x=-347t+69,\ y=32t-4}$（$\boldsymbol{t}$ **は整数**）

(4)$128x+19y=1700$ ……①　$128x=-19y+1700$，$128=19\cdot 6+14$，$1700=19\cdot 89+9$ より，

$14x\equiv 9\ (\mathrm{mod}\,19)$ ……②　$19x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,19)$ ……③　③－②より，$5x\equiv -9\ (\mathrm{mod}\,19)$ ……④

④×4－③より，$x\equiv -36\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,19)$ だから，$x=19t+2$（t は整数）

よって，①から，$19y=-128x+1700=-128(19t+2)+1700$，$y=-128t+76$

以上より，$\boldsymbol{x=19t+2,\ y=-128t+76}$（$\boldsymbol{t}$ **は整数**）

17　$y=s$（s は整数）とおくと，$13x+67z=615-103s$……①　$67z=-13x+615-103s$，$67=13\cdot 5+2$，

$615=13\cdot 47+4$，$103=13\cdot 8-1$ より，$2z\equiv 4+s\ (\mathrm{mod}\,13)$ ……②　$13z\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,13)$ ……③

②×7－③より，$z\equiv 28+7s\equiv 2+7s\ (\mathrm{mod}\,13)$ だから，$z=13t+7s+2$（t は整数）

よって，①から，$13x=-67z+615-103s=-67(13t+7s+2)+615-103s$　$x=-44s-67t+37$

以上より，$\boldsymbol{x=-44s-67t+37,\ y=s,\ z=7s+13t+2}$（$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{t}$ **は整数**）

18　(1)このような自然数を n とすると，n は x，y を整数として，$n=11x+7$，$n=135y+88$ のように表される．

よって，$11x+7=135y+88$，$11x-135y=81$ ……①

$135y=11x-81$，$135=11\cdot 12+3$，$81=11\cdot 7+4$ より，$3y\equiv -4\ (\mathrm{mod}\,11)$ ……②　$11y\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,11)$……③

②×4－③より，$y\equiv -16\equiv -5\ (\mathrm{mod}\,11)$ だから，$y=11t-5$（t は整数）

よって，①から，$11x=135y+81=135(11t-5)+81$，$x=135t-54$

以上より，$x=135t-54$，$y=11t-5$（t は整数）

$n=11(135t-54)+7=1485t-587=1485(t-1)+898$ より，求める余りは**898**

(2)求める自然数を n とすると，n は x，y，z を整数として，$n=11x+3$ ……①，$n=23y+15$ ……②，

$n=37z+28$ ……③のように表される．①，②より，$11x+3=23y+15$，$11x-23y=12$

解の1つが $(x,\ y)=(-1,\ -1)$ だから，$x=23k-1$，$y=11k-1$（k は整数）　①に代入すると，

$n=11(23k-1)+3=253k-8$（k は整数）……④　③，④より，$253k-8=37z+28$，$253k=37z+36$，

$253=37\cdot 7-6$ より，$-6k\equiv 36\ (\mathrm{mod}\,37)$，$k\equiv -6\ (\mathrm{mod}\,37)$ だから，$k=37l-6$（l は整数）

④に代入すると，$n=253(37l-6)-8=9361l-1526$

よって，$9361\cdot 1-1526=$**7835**

19　$2639=7\cdot 13\cdot 29$ より，3^{800} を7，13，29で割った余りをまず求める．

$3^{800}=9^{400}\equiv 2^{400}=2\cdot 8^{133}\equiv 2\cdot 1^{133}=2\ (\mathrm{mod}\,7)$

$3^{800}=3^2\cdot 3^{798}=9\cdot 27^{266}=9\cdot(13\cdot 2+1)^{266}\equiv 9\cdot 1^{266}=9\ (\mathrm{mod}\,13)$

また，$3^3\equiv -2\ (\mathrm{mod}\,29)$，$(-2)^5=-32\equiv -3\ (\mathrm{mod}\,29)$ より，$3^{15}\equiv -3\ (\mathrm{mod}\,29)$

よって，$3^{800}=3^{15\cdot 53+5}=(3^{15})^{53}\cdot 3^5\equiv(-3)^{53}\cdot 3^5=-3^{58}=-3^{15\cdot 3+13}=-(3^{15})^3\cdot 3^{13}\equiv -(-3)^3\cdot 3^{13}=3\cdot 3^{15}\equiv 3\cdot(-3)$

$=-9\equiv 20\ (\mathrm{mod}\,29)$

したがって，3^{800} を7，13，29で割った余りはそれぞれ2，9，20だから，x，y，z を整数として，

$3^{800}=7x+2$ ……①，$3^{800}=13y+9$ ……②，$3^{800}=29z+20$ ……③と表すことができる．

①，②より，$7x+2=13y+9$，$7x-13y=7$　解の1つが $(x,\ y)=(1,\ 0)$ だから，$x=13k+1$，$y=7k$（k は整数）

②に代入して，$3^{800}=91k+9$ ……④　③，④より，$91k+9=29z+20$，$91k=29z+11$　$91=29\cdot 3+4$ より，

$4k\equiv 11\ (\mathrm{mod}\,29)$ ……⑤　$29k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,29)$ ……⑥　⑥－⑤×7より，$k\equiv -77\equiv 10\ (\mathrm{mod}\,29)$ だから，

$k=29l+10$（l は整数）　④に代入すると，$3^{800}=91(29l+10)+9=2639l+919$

したがって，余りは**919**

研究と分析

P128 ① 集合の要素の個数(図や表の利用)

1 500以上1000以下の整数を全体集合U，そのうち，3の倍数の集合をA，7の倍数の集合をBとする．

$n(U)=1000-500+1=501$ ……① ←500としないこと

$499\div3=166$ 余り1，$1000\div3=333$ 余り1であるから，

$n(A)=333-166=167$ ……②

$499\div7=71$ 余り2，$1000\div7=142$ 余り6であるから，

$n(B)=142-71=71$ ……③

また，$A\cap B$は，21の倍数の集合である．

$499\div21=23$ 余り16，$1000\div21=47$ 余り13であるから，

$n(A\cap B)=47-23=24$ ……④

	A	$\overline{A}$	計
B	④ 24	47	③ 71
$\overline{B}$	143	287	430
計	② 167	334	① 501

右のような表を作り，①，②，③，④を記入して，残りを計算すると，

$n(\overline{A}\cap B)=47$，$n(\overline{A}\cap\overline{B})=287$

すなわち，500以上1000以下の整数のうち，3の倍数ではなく7の倍数であるものは，**47個**．

3の倍数でも7の倍数でもないものは，**287個**．

2 右の図1は，(c)→(b)→(a)の順に，計算しながら，含まれる要素の個数を記入したものである．

右の図2，図3の影の部分は，それぞれ$A\cup B$，$(A\cap C)\cup(B\cap C)$である．

図1から，それぞれの要素の個数を求めて，

図1

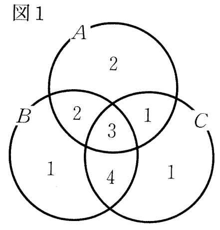
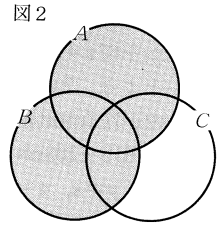
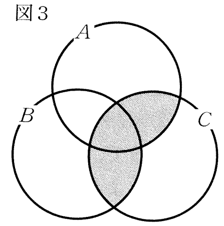


図2



$A\cup B$

図3



$(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$n(A\cup B)=$**13**，$n((A\cap C)\cup(B\cap C))=$**8**

また，$n(A\cup B\cup C)$は，図1のすべての要素の個数の和だから，$n(A\cup B\cup C)=$**14**

〔別解〕$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=8+10-5=13$

$(A\cap C)\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$であるから，

$n((A\cap C)\cup(B\cap C))=n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)$

$=4+7-3=8$

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=8+10+9-5-7-4+3=$**14**

P129 ② 最短経路

1 (1)A→M…$\dfrac{4!}{1!3!}=4$(通り)，M→N…$\dfrac{4!}{2!2!}=6$(通り)，N→B…$\dfrac{4!}{3!1!}=4$(通り)

であるから，積の法則により，$4\times6\times4=$**96(通り)**

(2)右の図1のような4つの点を，P，Q，R，Sとする．

A→P→B…1通り

A→Q→B

…$\dfrac{6!}{1!5!}\times\dfrac{6!}{5!1!}=36$(通り)

A→R→B

…右の図2より，$14^2=196$(通り)

A→S→B

…右の図3より，$14^2=196$(通り)

以上から，点Aから点Bに行く最短経路は，

$1+36+196+196=$**429(通り)**

図1

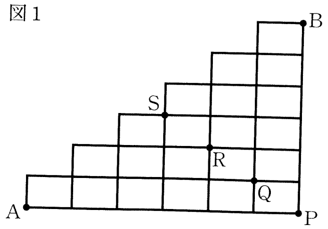
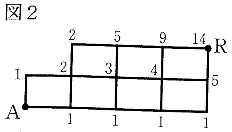
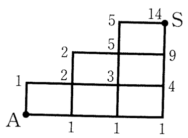


図2



(R→Bも同様に14通り)

図3



(S→Bも同様に14通り)

P130 ③ 確率の最大

1 1回の操作における赤玉が含まれる確率は，$1-\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{3}{5}$

$P_n={}_{99}C_n\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\left(\dfrac{2}{5}\right)^{99-n}=\dfrac{99!}{n!(99-n)!}\cdot\dfrac{3^n\cdot2^{99-n}}{5^{99}}$ より，$1\leqq k\leqq99$ のとき，

$\dfrac{P_k}{P_{k-1}}=\dfrac{99!}{k!(99-k)!}\cdot\dfrac{3^k\cdot2^{99-k}}{5^{99}}\times\dfrac{(k-1)!(100-k)!}{99!}\cdot\dfrac{5^{99}}{3^{k-1}\cdot2^{100-k}}=\dfrac{300-3k}{2k}$

$\dfrac{P_k}{P_{k-1}}>1$，$\dfrac{P_k}{P_{k-1}}=1$，$\dfrac{P_k}{P_{k-1}}<1$ となるのは，それぞれ，$k<60$，$k=60$，$k>60$ のときである．

よって，$P_0<P_1<\cdots\cdots<P_{58}<P_{59}=P_{60}>P_{61}>\cdots\cdots>P_{99}$ となる．

ゆえに，P_kを最大にするkの値は，$\boldsymbol{k=59,\ 60}$

2 (1)1，2のカードと他の6枚から2枚が取り出される確率だから，$\dfrac{1\cdot{}_6C_2}{{}_8C_4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{14}}$

(2)$X=k$となる確率をP_kとする．まず，$X=1$，7，8となることはあり得ないから，$P_1=P_7=P_8=0$である．

よって，$2\leqq k\leqq6$で考える．このとき，P_kは，k，kより小さいカード$(k-1)$枚から1枚，kより大きいカード$(8-k)$枚から2枚をひく確率だから，

$P_k=\dfrac{1\cdot{}_{k-1}C_1\cdot{}_{8-k}C_2}{{}_8C_4}=\dfrac{1}{140}(k-1)(8-k)(7-k)$

$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}=\dfrac{k(7-k)(6-k)}{(k-1)(8-k)(7-k)}=\dfrac{k(6-k)}{(k-1)(8-k)}$ $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}>1$ となるのは，$\dfrac{k(6-k)}{(k-1)(8-k)}>1$ より，

$k(6-k)>(k-1)(8-k)$，$k(k-6)<(k-1)(k-8)$，$-6k<-9k+8$，$k<\dfrac{8}{3}$ のときである．

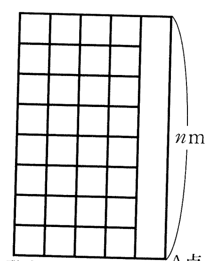
同様に，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}<1$ となるのは，$k>\dfrac{8}{3}$ のときである．ここで，kは$2\leqq k\leqq6$の自然数だから，

$P_2<P_3>P_4>\cdots\cdots>P_7$ が成り立つ．ゆえに，求めるkの値は，$\boldsymbol{k=3}$

〔注〕本問では，P_kとP_{k+1}の大小を比較している．これは，もしP_kとP_{k-1}を比較することにすると，

$\dfrac{P_k}{P_{k-1}}=\dfrac{(k-1)(7-k)}{(k-2)(9-k)}$ となり，$k=2$のときに分母が0となって都合が悪いからである．状況を見て，どのような方法で比較するかを判断するとよい．

3 (1)全部で$(n+5)$回硬貨を投げることになり，そのうち5回は表で，n回は裏であるが，最後は必ず表とならねばならない．すなわち，最初から$(n+4)$回目までに4回表が出て，最後に表が出る確率である．



出発点 A点 白線

よって，$P_n={}_{n+4}C_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{{}_{n+4}C_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+5}}$

(2)$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}={}_{n+5}C_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+6}\div{}_{n+4}C_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+5}$

$=\dfrac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}{4!}\cdot\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4!}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}$

$=\dfrac{n+5}{2(n+1)}$

$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1$，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1$ となるのは，それぞれ，$n<3$，$n=3$，$n>3$

のときであるから，$P_0<P_1<P_2<P_3=P_4>P_5>P_6>\cdots\cdots$ が成り立つ．

よって，求めるnの値は，$\boldsymbol{n=3,\ 4}$

P131 ④ 整数に関する諸定理

1 (1)$30=2\cdot3\cdot5$ なので，30の正の約数の個数は，$(1+1)(1+1)(1+1)=8$(個)

よって，30の正の約数の積は，$\sqrt{30^8}=30^4=$**810000**

(2)a，b，cは異なる素数なので，$a^2b^3c^4$の正の約数の個数は，$(2+1)(3+1)(4+1)=60$(個)

よって，$a^2b^3c^4$の正の約数の積は，$\sqrt{(a^2b^3c^4)^{60}}=(a^2b^3c^4)^{30}=\boldsymbol{a^{60}b^{90}c^{120}}$

2 (1)67は素数なので，$(67-1)!+1=66!+1\equiv0 \pmod{67}$ よって，$66!\equiv-1\equiv66 \pmod{67}$

66!を67で割った余りは**66**である．

(2)(1)より，$66!\equiv 66 \pmod{67}$　66と67は互いに素なので，$65!\equiv 1 \pmod{67}$ ……①
$64!\equiv r \pmod{67}$ $(0\leqq r\leqq 66)$ とすると，$65!\equiv 65r \pmod{67}$ ……②
①，②より，$65r\equiv 1 \pmod{67}$ なので，$65r=67l+1$（l は整数）……③ とおける．③より，$65(r-l)-2l=1$
$(r-l,\ l)=(1,\ 32)$ は方程式を満たすので，$(r,\ l)=(33,\ 32)$ は解の１つである．
よって，$r=67n+33$（n は整数）　$0\leqq r\leqq 66$ より，$r=33$　よって，余りは**33**

3 (1)17は素数で，７と17は互いに素なので，$7^{16}\equiv 1 \pmod{17}$ である．
よって，$7^{5000}=7^{312\cdot 16+8}=(7^{16})^{312}\cdot 7^8\equiv 1^{312}\cdot 49^4=(17\cdot 3-2)^4\equiv(-2)^4=16 \pmod{17}$ より，余りは**16**
(2)$391=17\cdot 23$ である．23は素数で，７と23は互いに素なので，$7^{22}\equiv 1 \pmod{23}$ である．
よって，$7^{5000}=7^{227\cdot 22+6}=(7^{22})^{227}\cdot 7^6\equiv 1^{227}\cdot 49^3\equiv 3^3\equiv 4 \pmod{23}$ より，余りは4
したがって，整数 x，y を用いて，$7^{5000}=17x+16$ ……①，$7^{5000}=23y+4$ ……② と表すことができる．
よって，$17x+16=23y+4$，$23y-17x=12$　$(x,\ y)=(2,\ 2)$ は方程式の解なので，
$x=23k+2$，$y=17k+2$（k は整数）　①に代入すると，$7^{5000}=17(23k+2)+16=391k+50$
したがって，余りは**50**
(3)$153=9\cdot 17$ である．$21^{5000}=(3\cdot 7)^{5000}$ は９で割り切れる．17は素数で，17と21は互いに素なので，
$21^{16}\equiv 1 \pmod{17}$ である．
よって，$21^{5000}=21^{312\cdot 16+8}=(21^{16})^{312}\cdot 21^8\equiv 1^{312}\cdot 4^8=16^4\equiv(-1)^4=1 \pmod{17}$
したがって，整数 x，y を用いて，$21^{5000}=9x$ ……①，$21^{5000}=17y+1$ ……② と表すことができる．
よって，$9x=17y+1$，$9x-17y=1$
$(x,\ y)=(2,\ 1)$ は方程式の解なので，$x=17k+2$，$y=9k+1$（k は整数）
①に代入すると，$21^{5000}=9(17k+2)=153k+18$　したがって，余りは**18**

4 $561=3\cdot 11\cdot 17$ である．３は素数で，a と３は互いに素なので，$a^2\equiv 1 \pmod{3}$ が成り立つ．
よって，$a^{560}=(a^2)^{280}\equiv 1^{280}=1 \pmod{3}$
同様に，11は素数で，a と11は互いに素なので，$a^{10}\equiv 1$，$a^{560}\equiv 1 \pmod{11}$
17は素数で，a と17は互いに素なので，$a^{16}\equiv 1$，$a^{560}\equiv 1 \pmod{17}$
よって，a^{560} を３，11，17で割った余りはいずれも１だから，$a^{560}-1$ は，３でも11でも17でも割り切れ，これらの最小公倍数561で割り切れる．よって，$a^{560}-1=561k$，すなわち，$a^{560}=561k+1$（k は整数）
したがって，a と561が互いに素ならば，a^{560} を561で割った余りは１である．

高校リード問題集

[解答と解説]

数学A

目　次

第１章　場合の数と確率
　1　集合と要素の個数……2
　2　場合の数・順列……4
　3　組合せ……6
　4　確率の基本性質……9
　5　いろいろな確率……11
　　章末問題……18
第２章　図形の性質
　1　三角形の性質……20
　2　円の性質……26
　3　作図……33
　4　空間図形……37
　　章末問題……41
第３章　数学と人間の活動
　1　約数と倍数……44
　2　ユークリッドの互除法……50
　3　整数の性質の活用……59
　　章末問題……64
　補講　合同式……67
研究と分析……70