第3章 数学と人間の活動

1 約数と倍数

例題 1　約数と倍数

例 (1) 12の約数は，次の12個の整数である．

1，2，3，4，6，12，−1，−2，−3，−4，−6，−12

これらをまとめて書くと，±1，±2，±3，±4，±6，±12

(2) 3の倍数は，次のように無数にある．

……，−9，−6，−3，0，3，6，9，12，15，18，21，24，27，30，……

これらをまとめて書くと，0，±3，±6，±9，±12，±15，±18，……

1 次の問いに答えよ．

(1) 18の約数をすべて求めよ．

(2) 60の約数をすべて求めよ．

(3) 4の倍数のうち，絶対値が20以下であるものをすべて求めよ．

(4) 6の倍数のうち，絶対値が20以上50以下であるものをすべて求めよ．

例題 2　倍数と証明

a，bは整数とする．aと$2a-b$がともに3の倍数ならば，bは3の倍数であることを証明せよ．

解 a，$2a-b$は3の倍数であるから，整数k，lを用いて，$a=3k$，$2a-b=3l$と表される．

よって，$b=2a-3l=2\cdot3k-3l=3(2k-l)$　$2k-l$は整数であるから，bは3の倍数である．

2 次のことを証明せよ．ただし，文字はすべて整数を表すものとする．

(1) aとbがともに5の倍数ならば，$2a+3b$は5の倍数である．

(2) aと$a+3b$がともに6の倍数ならば，bは偶数である．

(3) aとbがともに3の倍数ならば，a^2+ab+b^2は9の倍数である．

3 次の問いに答えよ．

(1) 3桁の自然数で，もとの自然数と，その百の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との差は99の倍数である．このわけを説明せよ．

(2) 4桁の自然数で，下3桁の数から千の位の数を引いた数が7の倍数ならば，もとの4桁の数は7の倍数である．このわけを説明せよ．

●ポイント

① 2つの整数a，bについて，ある整数kが存在して$a=bk$と表されるとき，bはaの**約数**であるといい，aはbの**倍数**であるという．

② 約数には負の数も含める．正の数pがaの約数ならば，$-p$もaの約数である．

③ 倍数には0や負の数も含める．正の数pがaの倍数ならば，0と$-p$もaの倍数である．

例題 3　倍数の判定①

倍数の判定法

2の倍数…一の位が偶数

3の倍数…各位の数の和が3の倍数

4の倍数…下2桁が4の倍数

5の倍数…一の位が0または5

6の倍数…2の倍数かつ3の倍数

8の倍数…下3桁が8の倍数

9の倍数…各位の数の和が9の倍数

例 (1) 2541は，各位の数の和が$2+5+4+1=12$より，3の倍数であるが9の倍数ではない．

(2) 3728は，下2桁の28が4の倍数であるから，4の倍数である．

(3) 4980は，一の位が0より2の倍数であり，5の倍数でもある．

また，各位の数の和が$4+9+8+0=21$より3の倍数であるから，6の倍数である．

(4) 7136は，下3桁の136が8の倍数であるから，8の倍数である．

〔参考〕 7の倍数の判定法は右のようになる．例えば，62870738のとき，62|870|738と区切り，$62-870+738$を計算すると-70となる．-70は7の倍数であるから，62870738は7の倍数である．

自然数nを一の位から3桁ごとに区切り，それらを交互に足して引いてを繰り返してできた数が7の倍数ならば，nは7の倍数である．7の倍数には0や負の数も含まれることに注意する．

4 次の整数は，2，3，4，5，6，8，9のうち，どの数の倍数であるか答えよ．

(1) 3126　(2) 6128　(3) 6015　(4) 9549

5 次の問いに答えよ．

(1) 5桁の自然数157□6が3の倍数であるとき，□に入る数をすべて求めよ．

(2) 7桁の自然数13□47□2が9の倍数であるとき，このような自然数で最大のものを求めよ．

6 次の問いに答えよ．

(1) 5桁の自然数$8a5b2$が72で割り切れるように，千の位の数aおよび十の位の数bを定めよ．

(2) 3708125は，一の位を除くどの位に1を加えても45で割り切れることを示せ．

例題 4　倍数の判定②

3桁の自然数について，各位の数の和が3の倍数ならば，もとの自然数は3の倍数であることを証明せよ．

解 3桁の自然数nについて，百の位，十の位，一の位の数をそれぞれa，b，cとすると，

$n=100a+10b+c=(99a+9b)+a+b+c=3(33a+3b)+a+b+c$と表すことができる．

$3(33a+3b)$は3の倍数なので，$a+b+c$が3の倍数ならばnは3の倍数である．

7 4桁の自然数について，次のことを証明せよ．

(1) 各位の数の和が9の倍数ならば，もとの自然数は9の倍数である．

(2) 下2桁が4の倍数ならば，もとの自然数は4の倍数である．

●ポイント

① **6** (1) $8a5b2$が8の倍数かつ9の倍数になるためのa，bの条件を考える．

例題 5　素因数分解

次の問いに答えよ．

(1)　378を素因数分解せよ．　　(2)　1764はどんな自然数の平方か．

解　(1)　378を素数で順に割り，商が素数になったらやめる．

$$\begin{array}{r|r} 2 & 378 \\ \hline 3 & 189 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$378=\mathbf{2\cdot3^3\cdot7}$

(2)　1764を素因数分解し，$\square^2$の形に表す．

$1764=2^2\cdot3^2\cdot7^2=(2\cdot3\cdot7)^2=42^2$

より，**42**

8　次の数を素因数分解せよ．

(1)　24　　(2)　42　　(3)　108

(4)　252　　(5)　595　　(6)　1230

9　次の数はどんな自然数の平方か．

(1)　169　　(2)　196　　(3)　361

(4)　676　　(5)　1089　　(6)　2704

10　自然数a，bについて，等式$2^a\times27=128\times3^b$が成り立つとき，a，bの値を求めよ．

例題 6　素因数分解の利用

$N=\sqrt{840n}$が自然数になるような最小の自然数nと，そのときのNの値を求めよ．

解　$\sqrt{840n}$が自然数になるには，$840n$がある自然数の２乗になればよい．

840を素因数分解すると，$840=2^3\cdot3\cdot5\cdot7$　よって，求める自然数nは，$n=2\cdot3\cdot5\cdot7=\mathbf{210}$

このとき，$N=\sqrt{(2^3\cdot3\cdot5\cdot7)\times(2\cdot3\cdot5\cdot7)}=\sqrt{2^4\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}=\sqrt{(2^2\cdot3\cdot5\cdot7)^2}=2^2\cdot3\cdot5\cdot7=\mathbf{420}$

11　次の問いに答えよ．

(1)　$N=\sqrt{378n}$が自然数になるような最小の自然数nと，そのときのNの値を求めよ．

(2)　$\sqrt{120n}$が自然数になるような自然数nを小さい方から３個求めよ．

(3)　$\sqrt{\dfrac{540}{n}}$が自然数になるような自然数nをすべて求めよ．

(4)　$252n$がある自然数の立方になるような自然数nのうち，最小のものを求めよ．

12　次の問いに答えよ．

(1)　$\sqrt{63n}$と$\sqrt{n+32}$がともに整数となるような最小の自然数nを求めよ．

(2)　$\sqrt{2160(175-2n)}$が自然数になるような自然数nをすべて求めよ．

●ポイント

①　１とその数のほかに正の約数がない自然数が**素数**である．ただし，１は素数ではない．

②　**素因数分解**とは，自然数を素数の積で表すことである．

③　２以上の自然数で素数でない数を**合成数**という．１つの合成数の素因数分解は，積の順序の違いを除けばただ１通りである．このことを素因数分解の一意性という．

例題 7　約数を求める

392の正の約数をすべて求めよ．

解　392を素因数分解すると，$392=2^3\cdot7^2$

よって，392の正の約数は，素因数２を３個以下，素因数７を２個以下もつ数で右のようになる．

$2^0\cdot7^0=1$，　$2^0\cdot7^1=7$，　$2^0\cdot7^2=49$

$2^1\cdot7^0=2$，　$2^1\cdot7^1=14$，　$2^1\cdot7^2=98$

$2^2\cdot7^0=4$，　$2^2\cdot7^1=28$，　$2^2\cdot7^2=196$

$2^3\cdot7^0=8$，　$2^3\cdot7^1=56$，　$2^3\cdot7^2=392$

答　1，2，4，7，8，14，28，49，56，98，196，392

〔注〕　一般に，自然数nに対し，$n^0=1$と定める．

13　次の数の正の約数をすべて求めよ．

(1)　45　　(2)　216　　(3)　84　　(4)　810

14　nを自然数とするとき，次の式の値が自然数となるようなnの値をすべて求めよ．

(1)　$\dfrac{80}{n+9}$　　(2)　$\dfrac{4n-3}{n-3}$

例題 8　約数の個数と和

450の約数について，次のものを求めよ．

(1)　正の約数の個数　　(2)　正の約数の総和

解　(1)　素因数分解すると，$450=2^1\cdot3^2\cdot5^2$だから，$(1+1)(2+1)(2+1)=2\cdot3\cdot3=\mathbf{18}$**(個)**

(2)　450の正の約数は，$(1+2)(1+3+3^2)(1+5+5^2)$を展開するとすべて現れる．

よって，求める正の約数の総和は，$(1+2)(1+3+3^2)(1+5+5^2)=3\cdot13\cdot31=\mathbf{1209}$

15　次の自然数について，正の約数の個数，正の約数の総和をそれぞれ求めよ．

(1)　108　　(2)　315　　(3)　990

16　360の正の約数の２乗の総和をS_1，逆数の総和をS_2とする．S_1，S_2をそれぞれ求めよ．

17　曲線$y=\dfrac{60}{x}$上にあり，x座標，y座標がともに整数である点は何個あるか．

18　次の問いに答えよ．

(1)　$xy=45$を満たす自然数の組$(x,\ y)$は何個あるか．

(2)　$xyz=45$を満たす自然数の組$(x,\ y,\ z)$は何個あるか．

●ポイント

①　ある自然数が$a^pb^qc^r\cdots\cdots$と素因数分解されるとき，

正の約数の個数は，$\boldsymbol{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots}$**(個)**

正の約数の総和は，$\boldsymbol{(1+a+\cdots+a^p)(1+b+\cdots+b^q)(1+c+\cdots+c^r)\cdots\cdots}$

例題 9　最大公約数・最小公倍数①

(1) **108と360の最大公約数，最小公倍数**

まず，2 数を素因数分解して，$108=2^2\cdot3^3$，$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

最大公約数は，共通な素因数のうち，指数が小さい方の積で，$2^2\cdot3^2=$**36**

最小公倍数は，素因数のうち，指数が大きい方の積で，$2^3\cdot3^3\cdot5=$**1080**

最大公約数　$108=\underline{2^2}\cdot3^3$
$360=2^3\cdot\underline{3^2}\cdot5^1$

最小公倍数　$108=2^2\cdot\underline{3^3}$
$360=\underline{2^3}\cdot3^2\cdot\underline{5^1}$

(2) **72，126，240の最大公約数，最小公倍数**

$72=2^3\cdot3^2$，$126=2\cdot3^2\cdot7$，$240=2^4\cdot3\cdot5$

(1)と同様に考えると，

最大公約数……$2\cdot3=$**6**

最小公倍数……$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7=$**5040**

最大公約数
$72=2^3\cdot3^2$
$126=\underline{2^1}\cdot3^2\cdot7^1$
$240=2^4\cdot\underline{3^1}\cdot5^1$

最小公倍数
$72=2^3\cdot3^2$
$126=2^1\cdot\underline{3^2}\cdot\underline{7^1}$
$240=\underline{2^4}\cdot3^1\cdot\underline{5^1}$

〔注〕最大公約数・最小公倍数は次のように求めることもできる．

(1)
$$\begin{array}{r|rr} 2 & 108 & 360 \\ \hline 2 & 54 & 180 \\ \hline 3 & 27 & 90 \\ \hline 3 & 9 & 30 \\ \hline & 3 & 10 \end{array}\qquad\begin{array}{r|rr} 2 & 108 & 360 \\ \hline 2 & 54 & 180 \\ \hline 3 & 27 & 90 \\ \hline 3 & 9 & 30 \\ \hline & 3 & 10 \end{array}$$

最大公約数…$2\cdot2\cdot3\cdot3=36$

最小公倍数…$2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot10=1080$

(2)
$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 72 & 126 & 240 \\ \hline 3 & 36 & 63 & 120 \\ \hline & 12 & 21 & 40 \end{array}\qquad\begin{array}{r|rrr} 2 & 72 & 126 & 240 \\ \hline 3 & 36 & 63 & 120 \\ \hline 2 & 12 & 21 & 40 \\ \hline 2 & 6 & 21 & 20 \\ \hline 3 & 3 & 21 & 10 \\ \hline & 1 & 7 & 10 \end{array}$$

最大公約数…$2\cdot3=6$

最小公倍数…$2\cdot3\cdot2\cdot2\cdot3\cdot1\cdot7\cdot10=5040$

19 次の各組の数の最大公約数と最小公倍数を求めよ．

(1) 252，420　(2) 336，392　(3) 90，180，210　(4) 126，189，630

20 次の各組の数のいずれに掛けても積が自然数となるような有理数のうち，最小のものを求めよ．

(1) $\dfrac{35}{18}$，$\dfrac{50}{63}$　(2) $\dfrac{135}{8}$，$\dfrac{225}{28}$　(3) $\dfrac{392}{15}$，$\dfrac{588}{55}$，$\dfrac{980}{33}$

21 1861，3093，1333のいずれを割っても，余りが13となる自然数のうち，最大のものを求めよ．

22 次の問いに答えよ．

(1) 縦165cm，横360cmの床に1辺の長さ$x$cmの正方形のタイルをすき間なく敷き詰める．タイルをできるだけ大きくするとき，xの値はいくらか．ただし，xは自然数とする．

(2) ある始発駅で，一番線からは6分ごとに，二番線からは14分ごとに，三番線からは20分ごとに電車が発車する．正午ちょうどに3つのホームから電車が同時に発車した．このとき，次に3つのホームから電車が同時に発車する時刻を求めよ．

●ポイント

① **20** 有理数$q=\dfrac{m}{n}$を掛けて整数になるには，mは分母の公倍数，nは分子の公約数であることが必要．このようなqが最小となるのは，mが最小公倍数，nが最大公約数のときである．

例題 10　最大公約数・最小公倍数②

nは自然数とする．nと63の最小公倍数が1764であるようなnをすべて求めよ．

解　63と1764を素因数分解すると，$63=3^2\cdot7$，$1764=2^2\cdot3^2\cdot7^2$

よって，63との最小公倍数が1764である自然数は$2^2\cdot3^\alpha\cdot7^2$ $(\alpha=0,\ 1,\ 2)$と表される．

したがって，$n=2^2\cdot3^0\cdot7^2$，$2^2\cdot3^1\cdot7^2$，$2^2\cdot3^2\cdot7^2$

すなわち，$\boldsymbol{n=196,\ 588,\ 1764}$

23 nは自然数とする．nと200の最小公倍数が4400であるようなnをすべて求めよ．

24 nは自然数とする．nと540の最小公倍数が2700であるようなnは何個あるか．

例題 11　0が並ぶ個数

50!を計算すると，末尾に0が連続して何個並ぶか．

解　50!の末尾に連続して並ぶ0の個数は，50!が10で割り切れる回数に等しい．

$10=2\cdot5$で，50!を素因数分解したときの素因数の個数は2の方が5より多いので，

50!が10で割り切れる回数は50!の素因数5の個数に一致する．

1から50までの自然数のうち，

5の倍数の個数は，$50=5\cdot10$より10個，

5^2の倍数の個数は，$50=5^2\cdot2$より2個．

	1…	5…	10…	15…	20…	25…	30……	50
5の倍数		○	○	○	○	○	○	○
5^2の倍数						○		○

よって，50!を素因数分解したときの素因数5の個数は，$10+2=12$(個)

したがって，50!の末尾に連続して並ぶ0の個数は**12個**．

25 800!を計算すると，末尾に0が連続して何個並ぶか．

26 $\dfrac{60!}{3^m\cdot5^n}$が整数となるような0以上の整数の組$(m,\ n)$は何個あるか．

27 ${}_{1000}C_{400}$を自然数で表すと，末尾に0が連続して何個並ぶか．

●ポイント

① **26** 60!を素因数分解したときの素因数3と5の個数を調べればよい．

② **27** ${}_{1000}C_{400}=\dfrac{1000!}{400!600!}$より，400!，600!，1000!について素因数5の個数を調べればよい．

例題 12「互いに素」を利用する証明

a を自然数とする．$a+2$ は3の倍数であり，$a+3$ は5の倍数であるとき，$a+8$ は15の倍数であることを証明せよ．

解 $a+2$，$a+3$ は自然数 k，l を用いて $a+2=3k$，$a+3=5l$ と表される．このとき，
$a+8=(a+2)+6=3k+6=3(k+2)$，$a+8=(a+3)+5=5l+5=5(l+1)$ より，
$3(k+2)=5(l+1)$
$3(k+2)$ は5の倍数であるが，3と5は互いに素であるから，$k+2$ は5の倍数である．
よって，自然数 m を用いて $k+2=5m$ と表されるから，$a+8=3(k+2)=3\cdot5m=15m$
したがって，$a+8$ は15の倍数である．

28 a を自然数とする．$a+1$ は4の倍数であり，$a+3$ は9の倍数であるとき，$a+21$ は36の倍数であることを証明せよ．

29 背理法を用いて次のことを証明せよ．
(1) 自然数 a と b が互いに素であるとき，$a+2b$ と $3a+5b$ も互いに素である．
(2) 自然数 a，b が互いに素であるとき，$a+b$ と ab も互いに素である．

例題 13 最大公約数・最小公倍数の性質

最大公約数が21で，最小公倍数が735である2つの自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

解 最大公約数が21であるから，$a=21a'$，$b=21b'$（a'，b' は互いに素な自然数で $a'<b'$）と表せる．
このとき，a，b の最小公倍数は $21a'b'$ であるから，$21a'b'=735$，$a'b'=35$
よって，$(a',\ b')=(1,\ 35)$，$(5,\ 7)$ したがって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(21,\ 735),\ (105,\ 147)}$

30 次の条件を満たす2つの自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．
(1) 最大公約数が24，最小公倍数が720　　(2) 最大公約数が28，最小公倍数が2100

31 次の条件を満たす2つの自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．ただし，a，b はともに3桁で，$a<b$ とする．
(1) 最大公約数が72，和が648　　(2) 最大公約数が91，差が455

●ポイント

① 2つの整数 a，b の最大公約数が1であるとき，a，b は**互いに素**であるという．
② 自然数 a，b，p について ab が p の倍数のとき，a と p が互いに素ならば b は p の倍数である．
③ 自然数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とすると，$a=ga'$，$b=gb'$（a'，b' は互いに素）とおくことができて，次が成り立つ．
(1) $l=ga'b'$　(2) $ab=gl$（特に，a，b が互いに素ならば $ab=l$）
④ **29** (2) a と b が互いに素であるとき，$a+b$ と ab が互いに素でないと仮定して矛盾（a と b が1より大きい公約数をもつ）を導けばよい．

32 次の条件を満たす2つの自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．
(1) 積が864，最小公倍数が144　　(2) 積が4116，最小公倍数が588

33 和が528で，最小公倍数が5797である2つの自然数の組 $(a,\ b)$ を求めよ．ただし，$a<b$ とする．

34 a，b は自然数で $a<b$ とし，$a+b$ は a，b の最大公約数の5倍に等しく，$6ab$ は a，b の最小公倍数の2乗に等しいとする．このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値を求めよ．

例題 14 剰余の利用①（余りを求める）

a，b は整数とする．a を7で割ると4余り，b を7で割ると5余る．このとき，次の数を7で割ったときの余りを求めよ．
(1) $a+b$　　(2) $a-3b$　　(3) ab

解 a，b は k，l を整数として $a=7k+4$，$b=7l+5$ のように表される．
(1) $a+b=(7k+4)+(7l+5)=7k+7l+9=7(k+l+1)+2$
よって，$a+b$ を7で割ったときの余りは**2**である．
(2) $a-3b=(7k+4)-3(7l+5)=7k+4-21l-15=7k-21l-11=7(k-3l-2)+3$
よって，$a-3b$ を7で割ったときの余りは**3**である．
(3) $ab=(7k+4)(7l+5)=49kl+35k+28l+20=7(7kl+5k+4l+2)+6$
よって，ab を7で割ったときの余りは**6**である．

35 a，b は整数とする．a を5で割ると3余り，b を5で割ると4余る．このとき，次の数を5で割ったときの余りを求めよ．
(1) $a+b$　　(2) $2a+3b$　　(3) ab

36 a，b は整数とする．a を3で割ると2余り，$2a^2-b$ を3で割ると1余る．このとき，b を3で割ったときの余りを求めよ．

●ポイント

① **32** 自然数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とすると $ab=gl$ が成立する．
② **33** 自然数 a，b について，a，b が互いに素ならば $a+b$ と ab も互いに素である．

例題 15 剰余の利用②（連続整数の積）

連続する3つの奇数の平方の和から11を引いた数は24で割り切れることを証明せよ．

解 連続する3つの奇数はnを整数として，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$と表すことができる．

このとき，$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2=(4n^2-4n+1)+(4n^2+4n+1)+(4n^2+12n+9)$

$=12n^2+12n+11$より，$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2-11=12n^2+12n=12n(n+1)$

n，$n+1$のいずれかは2の倍数なので，$n(n+1)$は2の倍数である．よって，$12n(n+1)$は24の倍数なので，連続する3つの奇数の平方の和から11を引いた数は24で割り切れる．

37 次のことを証明せよ．

(1) 奇数の平方から1を引いた数は8で割り切れる．

(2) nが整数であるとき，n^2+3nは2で割り切れる．

38 連続する3つの整数の積は6で割り切れることを利用して，nが整数であるとき，n^3+5nは6で割り切れることを証明せよ．

例題 16 剰余の利用③（平方剰余）

nを整数とするとき，n^2を5で割ったときの余りは0または1または4であることを証明せよ．

解 すべての整数nは5で割った余りで，$n=5k$，$n=5k+1$，$n=5k+2$，$n=5k+3$，$n=5k+4$（kは整数）のいずれかの形で表される．

[1] $n=5k$のとき，$n^2=(5k)^2=25k^2=5\cdot5k^2$

[2] $n=5k+1$のとき，$n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$

[3] $n=5k+2$のとき，$n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$

[4] $n=5k+3$のとき，$n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$

[5] $n=5k+4$のとき，$n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$

よって，n^2を5で割ったときの余りは0または1または4である．

39 次のことを証明せよ．

(1) nを整数とするとき，n^2を4で割ったときの余りは0または1である．

(2) nを整数とするとき，n^2-2nを5で割ったときの余りは0または3または4である．

40 nを整数とするとき，n^2-n-1は3で割り切れないことを証明せよ．

41 l，m，nを整数とする．次のことを証明せよ．

(1) n^2を3で割ったときの余りは2にならない．

(2) $m^2+n^2=l^2$が成り立つならば，m，nの少なくとも一方は3で割り切れる．

●**ポイント**

① 連続する2つの整数の積は2の倍数，連続する3つの整数の積は$2\times3=6$の倍数である．

② **38** $n^3+5n=n^3-n+6n=n(n+1)(n-1)+6n$と変形する．

③ **41** (2) 背理法を用いて証明する．

例題 17 (整数)^{n}を割った余り①

3^{80}を7で割った余りを求めよ．

解 $3^{80}=9^{40}$で，$9=7\cdot1+2$より，9^{40}，2^{40}を7で割った余りは等しい．

$2^{40}=2\cdot2^{39}=2\cdot8^{13}$で，$8=7\cdot1+1$より，$8^{13}$，$1^{13}$を7で割った余りは等しい．

$1^{13}=1$を7で割った余りは1なので，$2^{40}=2\cdot8^{13}$を7で割った余りは，$2\cdot1=2$

よって，求める余りは**2**

42 次のものを求めよ．

(1) 16^{50}を5で割った余り　　(2) 2^{80}を3で割った余り

(3) 3^{50}を10で割った余り　　(4) 100^{100}を7で割った余り

43 2^{202}を17で割った余りを求めよ．

例題 18 (整数)^{n}を割った余り②

整数nを11で割った余りが3のとき，n^3+5n^2+3nを11で割った余りを求めよ．

解 n^3，$5n^2$，$3n$を11で割った余りと3^3，$5\cdot3^2$，$3\cdot3$を11で割った余りはそれぞれ一致するから，n^3+5n^2+3nと$3^3+5\cdot3^2+3\cdot3$を11で割った余りも一致する．

よって，$3^3+5\cdot3^2+3\cdot3=81=11\cdot7+4$より，求める余りは**4**

44 次の問いに答えよ．

(1) 整数nを3で割った余りが2のとき，n^3-3nを3で割った余りを求めよ．

(2) 整数nを7で割った余りが3のとき，n^4+2n^2を7で割った余りを求めよ．

45 nを整数とするとき，次のことを証明せよ．

(1) nが3で割り切れないとき，n^4+n^2は3で割り切れない．

(2) n^3+4n+2は5で割り切れない．

46 整数nが7の倍数でないとき，n^6-1は7で割り切れることを証明せよ．

47 a，bを整数とする．a^2+2b^2が3で割り切れるとき，a，bはともに3で割り切れるか，ともに3で割り切れないかのいずれかであることを証明せよ．

●**ポイント**

① mを自然数とし，2つの整数a，bをmで割ったときの余りをそれぞれr，r'とすると，

(1) $a\pm b$をmで割った余りは，$r\pm r'$をmで割った余りに等しい．

(2) abをmで割った余りは，rr'をmで割った余りに等しい．

(3) kを自然数とすると，a^kをmで割った余りは，r^kをmで割った余りに等しい．

② **47** 整数a，bを3で割った余りで分類して，a^2+2b^2を3で割ったときの余りを考える．

混合問題

A

1　自然数において，各位を下から2桁ずつ区切ってできる数の和が11の倍数ならば，もとの自然数は11の倍数である．このことを，4桁の自然数の場合について証明せよ．

2　31500の正の約数のうち，偶数であるものの総和を求めよ．

3　77以下の自然数で77と互いに素であるような自然数の個数を求めよ．

4　最大公約数が12，最小公倍数が216であるような3つの自然数の組$(a,\ b,\ c)$は何個あるか．ただし，$a<b<c$ とする．

5　n を自然数とする．n^2 と $2n+1$ は互いに素であることを示せ．

B

6　n を2以上の自然数とするとき，n^4+4 は素数にならないことを示せ．

7　l，m，n を自然数とする．$l+m+n$ が奇数のとき，整数 $3^l\cdot5^m\cdot7^n$ のすべての正の約数の総和が偶数であることを示せ．

8　3より大きい素数 p について，p^2 を12で割った余りを予想し，さらにその予想が正しいことを証明せよ．

9　自然数 a，b，c が $3a=b^3$，$5a=c^2$ を満たし，d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d=1$ に限るとする．

(1)　a は3と5で割り切れることを示せ．

(2)　a の素因数は3と5以外にないことを示せ．

(3)　a を求めよ．

■ヒント

8　3より大きい素数は，2の倍数でも3の倍数でもない．よって，p を6で割った余りで分類して考える．

9　(2)　背理法で証明する．a が3と5以外の素因数 p をもつと仮定して矛盾を導けばよい．

2　ユークリッドの互除法

例題 1　ユークリッドの互除法①

次の各組の整数の最大公約数を求めよ．

(1)　1147，1073　　　(2)　616，440，168

解　(1)　$1147=1073\cdot1+74$

$1073=74\cdot14+37$　（1073と74の最大公約数に等しい）

$74=37\cdot2+0$　（74と37の最大公約数に等しい）

よって，1147と1073の最大公約数は**37**である．

〔注〕　上のような最大公約数の求め方を**ユークリッドの互除法**または単に**互除法**という．

(2)　まず，616と440の最大公約数を求める．

$616=440\cdot1+176$，$440=176\cdot2+88$，$176=88\cdot2$ より，616と440の最大公約数は88

次に，168と88の最大公約数は，$168=88\cdot1+80$，$88=80\cdot1+8$，$80=8\cdot10$ より，8

よって，616，440，168の最大公約数は**8**である．

1　次の2つの整数の最大公約数を求めよ．

(1)　63，588　　(2)　165，360　　(3)　667，299

(4)　924，360　　(5)　323，874　　(6)　1836，8568

2　次の3つの整数の最大公約数を求めよ．

(1)　450，210，165　　(2)　980，588，448　　(3)　3080，1848，1323

例題 2　ユークリッドの互除法②

a と b が互いに素な自然数であるとき，$a+2b$ と $4a+9b$ も互いに素であることを証明せよ．

解　$4a+9b=4(a+2b)+b$ より，$4a+9b$ と $a+2b$ の最大公約数は $a+2b$ と b の最大公約数に等しい．

$a+2b=2\cdot b+a$ より，$a+2b$ と b の最大公約数は b と a の最大公約数に等しい．

a と b は互いに素なので，$a+2b$ と $4a+9b$ は互いに素である．

3　次のことを証明せよ．

(1)　a と b が互いに素な自然数であるとき，$3a+7b$ と $2a+5b$ も互いに素である．

(2)　n を自然数とするとき，$28n+5$ と $21n+4$ は互いに素である．

4　$9n+23$ と $4n+11$ の最大公約数が7になるような30以下の自然数 n をすべて求めよ．

●ポイント

①　2つの自然数 a，b について，a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると，a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい．このことを利用して最大公約数を求める方法がユークリッドの互除法である．

例題 3　不定方程式①　(基本)

方程式 $3x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ．

解　$3x+5y=1$ ……①において，$x=2$，$y=-1$ は解の1つであるから，$3\cdot2+5\cdot(-1)=1$ ……②

①−②より，$3(x-2)+5(y+1)=0$，$3(x-2)=-5(y+1)$ ……③　3と5は互いに素だから，

$x-2=5k$ (k は整数)である．これを③に代入して，$3\cdot5k=-5(y+1)$，$y+1=-3k$

したがって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=5k+2}$，$\boldsymbol{y=-3k-1}$ **(k は整数)**

〔注〕　a，b，c が整数(a，b は互いに素)であるとき，$ax+by=c$ ……④の1組の解を

$(x_0,\ y_0)$とすると，$ax_0+by_0=c$ ……⑤　④−⑤より，$a(x-x_0)=-b(y-y_0)$

このことから，上の例題と同様にして，$x=bk+x_0$，$y=-ak+y_0$ (k は整数)が導かれる．

5　次の方程式の整数解をすべて求めよ．

(1)　$4x-3y=0$　　(2)　$2x+7y=0$　　(3)　$5x-3y=1$

(4)　$2x+3y=1$　　(5)　$5x+6y=25$　　(6)　$8x+3y=22$

(7)　$5x+8y=47$　　(8)　$13x+7y=-5$　　(9)　$7x-11y=60$

例題 4　不定方程式②　(互除法の利用)

次の方程式の整数解をすべて求めよ．

(1)　$43x+13y=1$　　(2)　$43x+13y=5$

解　(1)　$43x+13y=1$ ……①とする．43と13に互除法を用いると，

$43=13\cdot3+4 \to 4=43-13\cdot3$ ……②，$13=4\cdot3+1 \to 1=13-4\cdot3$ ……③

②，③より，$1=13-4\cdot3=13-3(43-13\cdot3)=43\cdot(-3)+13\cdot10$

よって，$43\cdot(-3)+13\cdot10=1$ ……④が成り立つから，①の解の1つは，

$(x,\ y)=(-3,\ 10)$ である．

ゆえに，求める整数解は，$\boldsymbol{x=13k-3}$，$\boldsymbol{y=-43k+10}$ **(k は整数)**

(2)　④の両辺に5を掛けて，$43\cdot(-15)+13\cdot50=5$　よって，$43x+13y=5$ の解の1つは，

$(x,\ y)=(-15,\ 50)$ であるから，求める整数解は，

$\boldsymbol{x=13k-15}$，$\boldsymbol{y=-43k+50}$ **(k は整数)**

6　次の方程式の整数解をすべて求めよ．

(1)　$29x+13y=1$　　(2)　$51x-16y=1$　　(3)　$37x+31y=1$

(4)　$67x+20y=1$　　(5)　$51x-73y=1$　　(6)　$47x+32y=3$

(7)　$51x+14y=2$　　(8)　$41x+17y=30$　　(9)　$19x-65y=20$

●ポイント

①　例題3の方程式 $3x+5y=1$ ……①において，$(x,\ y)=(-3,\ 2)$ も解なので，これを用いて①を $3(x+3)+5(y-2)=0$，$3(x+3)=-5(y-2)$ と変形すると，整数解は $x=5l-3$，$y=-3l+2$ (l は整数)となる．このように，不定方程式では最初に見つける解(特殊解という)によって，整数解の表し方は違ってくるが，整数解の集合としてはすべて同じなのでどれを用いてもよい．

②　方程式 $ax+by=c$ (a と b は互いに素，$c\neq1$)を解くには，まず，$ax+by=1$ の1組の解$(x_0,\ y_0)$を求めればよい．このとき，$(cx_0,\ cy_0)$が方程式 $ax+by=c$ の解である．

例題 5　不定方程式③　(係数が大きい場合)

方程式 $130x+31y=1$ の整数解をすべて求めよ．

解　$130x+31y=1$ ……①とする．

130を31で割ると，$130=31\cdot4+6$ なので，①に代入すると，

$(31\cdot4+6)x+31y=1$，$31(4x+y)+6x=1$

$(4x+y,\ x)=(1,\ -5)$ はこの方程式を満たすので，

$4x+y=1$，$x=-5$ より，$(x,\ y)=(-5,\ 21)$

これは①の解の1つであるから，求める整数解は，$\boldsymbol{x=31k-5}$，$\boldsymbol{y=-130k+21}$ **(k は整数)**

7　次の方程式の整数解をすべて求めよ．

(1)　$152x+71y=1$　　(2)　$67x+212y=1$

(3)　$551x-14y=2$　　(4)　$129x+67y=5$

(5)　$74x+235y=7$　　(6)　$335x+32y=3$

8　次の問いに答えよ．

(1)　1900を189で割ったときの商と余りを求めよ．

(2)　方程式 $128x+61y=1900$ の整数解をすべて求めよ．

例題 6　3元1次不定方程式①　(連立型)

連立方程式 $\begin{cases} 7x+5y+2z=37 & \cdots\cdots① \\ 2x-y+z=13 & \cdots\cdots② \end{cases}$ の整数解をすべて求めよ．

解　①−②×2 より，$3x+7y=11$ ……③

この方程式の1つの解は，$(x,\ y)=(-1,\ 2)$ だから，③の解は，

$x=7k-1$，$y=-3k+2$ (k は整数)

これらを②に代入して，$2(7k-1)-(-3k+2)+z=13$，$z=-17k+17$

以上より，求める整数解は，$\boldsymbol{x=7k-1}$，$\boldsymbol{y=-3k+2}$，$\boldsymbol{z=-17k+17}$ **(k は整数)**

9　次の方程式の整数解をすべて求めよ．

(1)　$\begin{cases} 3x+8y-z=27 \\ 6x-3y+z=23 \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} 8x-5y+3z=35 \\ 3x+2y+z=9 \end{cases}$

(3)　$\begin{cases} 7x+6y+5z=6 \\ 2x-3y-z=4 \end{cases}$　　(4)　$\begin{cases} 2x-9y+11z=42 \\ x+8y+z=20 \end{cases}$

●ポイント

①　3文字の連立1次不定方程式を解くには，1つの文字を消去して2元1次不定方程式を導き，この方程式を解けばよい．

例題 7　3元1次不定方程式②

方程式 $7x+11y+3z=5$ の整数解をすべて求めよ．

解　$z=s$ (s は整数)とおくと，$7x+11y=5-3s$ ……①　$7x+11y=1$ の解の1つは
$(x,\ y)=(-3,\ 2)$ だから，$7\cdot(-3)+11\cdot 2=1$ が成り立つ．両辺に $5-3s$ を掛けて，
$7(-15+9s)+11(10-6s)=5-3s$ ……②
①－②から，$7(x-9s+15)+11(y+6s-10)=0$，$7(x-9s+15)=-11(y+6s-10)$
7と11は互いに素なので，t を整数として，$x-9s+15=11t$，$y+6s-10=-7t$
すなわち，$x=9s+11t-15$，$y=-6s-7t+10$ が導かれる．
以上より，求める整数解は，$\boldsymbol{x=9s+11t-15}$，$\boldsymbol{y=-6s-7t+10}$，$\boldsymbol{z=s}$ (s，t **は整数**)

10 次の方程式の整数解をすべて求めよ．

(1)　$2x+3y+5z=7$　　(2)　$3x-7y-11z=3$

(3)　$11x+13y+4z=1$　　(4)　$23x+17y+7z=9$

11 方程式 $4x+11y+17z=1000$ ……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　$x-31=X$，$y-31=Y$，$z-31=Z$ とおいて X，Y，Z の方程式を導き，その方程式の整数解をすべて求めよ．

(2)　方程式①の整数解をすべて求めよ．

例題 8　不定方程式の利用①

7で割ると4余り，15で割ると2余るような自然数のうち，3桁で最小のものを求めよ．

解　求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，$n=7x+4$，$n=15y+2$ のように表される．
よって，$7x+4=15y+2$，$7x-15y=-2$ ……①
$(x,\ y)=(4,\ 2)$ は①の解の1つだから，①の解は，$x=15k+4$，$y=7k+2$ (k は整数)
したがって，$n=7x+4=7(15k+4)+4=105k+32$ (k は整数)
このような3桁の自然数 n で最小のものは，$105\cdot 1+32=\mathbf{137}$

12 6で割ると5余り，11で割ると8余るような自然数のうち，3桁で最小のものを求めよ．

13 13で割ると6余り，23で割ると9余るような自然数のうち，1000以下のものは何個あるか．

●ポイント

①「a で割ると b 余り，c で割ると d 余る」ような自然数を求める問題では，求める自然数を n とおき，n を2通りに表すことで1次不定方程式をつくる．

14 3で割ると1余り，7で割ると2余り，11で割ると5余るような自然数のうち，3桁のものをすべて求めよ．

15 m は7で割ると5余り，11で割ると6余る自然数である．次の問いに答えよ．

(1)　m を77で割った余りを求めよ．　　(2)　m^2 を77で割った余りを求めよ．

例題 9　不定方程式の利用②

方程式 $3x+7y=71$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

解　$3x+7y=71$ において，$(x,\ y)=(19,\ 2)$ は解の1つであるから，この方程式の整数解は，
$x=7k+19$，$y=-3k+2$ (k は整数)
x，y は自然数なので，$7k+19\geqq 1$，$-3k+2\geqq 1$　よって，$-\dfrac{18}{7}\leqq k\leqq\dfrac{1}{3}$ より，
$k=-2,\ -1,\ 0$
したがって，方程式を満たす自然数の組は，$\boldsymbol{(x,\ y)=(5,\ 8),\ (12,\ 5),\ (19,\ 2)}$

16 次の方程式を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(1)　$5x+2y=41$　　(2)　$4x+3y=67$

(3)　$2x+7y=59$　　(4)　$5x+8y=162$

(5)　$11x+3y=217$　　(6)　$7x+5y=249$

17 方程式 $41x+17y=4200$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

18 次の方程式を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ は何個あるか．

(1)　$4x+3y=3000$　　(2)　$5x+7y=2014$

(3)　$11x+2y=4127$　　(4)　$3x+19y=5000$

19 所持金8700円で50円の鉛筆と80円のペンを買う．所持金をちょうど使い切るとき，鉛筆とペンの買い方は何通りあるか．ただし，鉛筆，ペンは少なくとも1本は買うものとする．

●ポイント

① **14** 求める自然数を n とおく．最初に，3で割ると1余り，7で割ると2余る数という条件から不定方程式をつくり，n を求める．次に，n を11で割ると5余ることから，もう一度不定方程式をつくる．

例題 10　不定方程式の利用③

方程式 $x+3y+5z=23$ を満たす自然数の組$(x,\ y,\ z)$をすべて求めよ．

解　$x+3y+5z=23$ から，$5z=23-x-3y$　$x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから，$5z\leqq23-1-3\cdot1=19$，$z\leqq\dfrac{19}{5}$

よって，$z=1,\ 2,\ 3$

[1]　$z=1$ のとき，$x+3y=18$，$3y=18-x$ から，$18-x$ は正で，かつ 3 の倍数である．

よって，$x=3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15$

ゆえに，$(x,\ y)=(3,\ 5),\ (6,\ 4),\ (9,\ 3),\ (12,\ 2),\ (15,\ 1)$

[2]　$z=2$ のとき，$x+3y=13$，$3y=13-x$ から，[1]と同様にして，$x=1,\ 4,\ 7,\ 10$

ゆえに，$(x,\ y)=(1,\ 4),\ (4,\ 3),\ (7,\ 2),\ (10,\ 1)$

[3]　$z=3$ のとき，$x+3y=8$，$3y=8-x$ から，[1]と同様にして，$x=2,\ 5$

ゆえに，$(x,\ y)=(2,\ 2),\ (5,\ 1)$

以上から，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(3,\ 5,\ 1),\ (6,\ 4,\ 1),\ (9,\ 3,\ 1),\ (12,\ 2,\ 1),\ (15,\ 1,\ 1),}$
$\boldsymbol{(1,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 2),\ (7,\ 2,\ 2),\ (10,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 3),}$
$\boldsymbol{(5,\ 1,\ 3)}$

20　次の方程式を満たす自然数の組$(x,\ y,\ z)$をすべて求めよ．

(1)　$2x+3y+7z=34$　　(2)　$6x+2y+z=19$

(3)　$5x+11y+21z=84$　　(4)　$35x+21y+60z=665$

21　方程式 $3x+2y+4z^2=43$ を満たす自然数の組$(x,\ y,\ z)$をすべて求めよ．

22　1個20円のあめと，1個50円のガムと，1個80円のチョコレートを，代金がちょうど500円になるように買いたい．何通りの買い方があるか．ただし，どの菓子も1個以上買うものとする．

例題 11　因数分解と整数解①

次の方程式を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ．

(1)　$xy-x+3y-12=0$　　(2)　$10xy+5x-4y-23=0$

解　(1)　(左辺)$=x(y-1)+3(y-1)+3-12=(x+3)(y-1)-9$ より，方程式は，$(x+3)(y-1)=9$ と変形できる．x，y は整数だから，$x+3$，$y-1$ も整数である．

よって，$(x+3,\ y-1)=(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1),\ (-1,\ -9),\ (-3,\ -3),\ (-9,\ -1)$

ゆえに，$\boldsymbol{(x,\ y)=(-2,\ 10),\ (0,\ 4),\ (6,\ 2),\ (-4,\ -8),\ (-6,\ -2),\ (-12,\ 0)}$

(2)　(左辺)$=5x(2y+1)-2(2y+1)+2-23=(5x-2)(2y+1)-21$ より，方程式は，$(5x-2)(2y+1)=21$ と変形できる．x，y は整数だから，$5x-2$，$2y+1$ も整数である．

よって，$(5x-2,\ 2y+1)=(1,\ 21),\ (3,\ 7),\ (7,\ 3),\ (21,\ 1),\ (-1,\ -21),$
$(-3,\ -7),\ (-7,\ -3),\ (-21,\ -1)$

x，y は整数であることから，$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 3),\ (-1,\ -2)}$

●ポイント

①　例題10のような問題では，$x\geqq1$，$y\geqq1$ であることから z の値の範囲を絞り込むことができる．

23　次の方程式を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ．

(1)　$xy-3x-2y+3=0$　　(2)　$xy-3x+5y-11=0$

(3)　$xy+4x+2y-7=0$　　(4)　$xy+8x+9y+17=0$

24　次の方程式を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ．

(1)　$2xy+3x+2y-3=0$　　(2)　$6xy+9x-4y+15=0$

25　次の方程式を満たす自然数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ．

(1)　$xy-3x+2y-12=0$　　(2)　$xy-5x+3y-27=0$

(3)　$3xy-x+3y-56=0$　　(4)　$6xy+2x-3y-13=0$

26　次の方程式を満たす自然数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ．

(1)　$\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=1$　　(2)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2y}=1$

27　n は自然数とする．$\sqrt{n^2+99}$ が自然数となるような n の値を求めよ．

例題 12　因数分解と整数解②

3つの自然数 x，y，z について，次の関係があるとき，x，y，z の値をそれぞれ求めよ．

$x+y+z=30$ ……①，$x^2+y^2=z^2$ ……②，$x<y<z$ ……③

解　①より，$z=30-x-y$　これを②に代入して，$x^2+y^2=(30-x-y)^2$，

$x^2+y^2=900+x^2+y^2-60x+2xy-60y$，$xy-30x-30y+450=0$，

$x(y-30)-30(y-30)-900+450=0$，$(x-30)(y-30)=450$

また，$y=30-x-z$ であり，③より，$x\geqq1$，$z\geqq3$ であるから，$1\leqq x<y\leqq26$

よって，$-29\leqq x-30<y-30\leqq-4$ なので，$(x-30,\ y-30)=(-25,\ -18)$

ゆえに，$(x,\ y)=(5,\ 12)$　このとき，$z=30-5-12=13$　これは $y<z$ を満たしている．

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(5,\ 12,\ 13)}$

28　3つの自然数 x，y，z について，次の関係があるとき，x，y，z の値をそれぞれ求めよ．

$x+y+z=60$ ……①，$x^2=y^2+z^2$ ……②，$x>y>z$ ……③

29　方程式 $x^3+y^3-2x^2y=1$ を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ．

●ポイント

①　**26**　分母を払い，例題11のような形に帰着させて考える．

②　**27**　$\sqrt{n^2+99}=m$（m は自然数）とおくことができる．両辺は正なので2乗してみる．

③　**29**　$(x^3-x^2y)+(y^3-x^2y)=1$ と変形し，左辺を因数分解してみる．

混合問題

A

1 次の各組の整数の最大公約数を求めよ．

(1) 2385，424　(2) 3007，1649　(3) 9261，5544，3080

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ．

(1) $7x+5y=1$　(2) $11x-8y=5$

(3) $17x+53y=1$　(4) $47x-13y=2$

3 方程式 $301x+100y=2012$ の整数解をすべて求めよ．

4 39で割ると5余り，43で割ると8余る自然数のうち，最小のものを求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $13x+3y=884$ を満たす自然数の組$(x,\ y)$の個数を求めよ．

(2) 方程式 $3x+8y+7z=51$ を満たす自然数の組$(x,\ y,\ z)$をすべて求めよ．

6 次の方程式を満たす自然数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ．

(1) $xy-3x+4y-26=0$　(2) $6xy+15x-2y-467=0$

B

7 nを自然数とする．方程式 $73x+17y=n$ を満たす負でない整数の組$(x,\ y)$が13個となるようなnのうち，最小のものを求めよ．

8 mは自然数で，5で割ると3余り，7で割ると4余り，11で割ると7余る．このとき，m^{30}を385で割った余りを求めよ．

9 次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$，$x\leqq y\leqq z$ を満たす自然数の組$(x,\ y,\ z)$をすべて求めよ．

(2) $l+\dfrac{1}{l}+m+\dfrac{1}{m}+n+\dfrac{1}{n}=k$ を満たす自然数の組$(l,\ m,\ n,\ k)$は何個あるか．

■ヒント

7 まず，与えられた方程式を，nを定数とみて解き，次にnの満たすべき条件を考える．

8 まず，m^{30}を5，7，11でそれぞれ割ったときの余りを考える．

9 (2) $\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ がどんな値をとりうるかを考える．

3 整数の性質の活用

例題 1　n進法①

次の数を10進法で表せ．

(1) $110101_{(2)}$　(2) $3124_{(5)}$

解 (1) $110101_{(2)}=1\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0=32+16+0+4+0+1=\mathbf{53}$

(2) $3124_{(5)}=3\cdot5^3+1\cdot5^2+2\cdot5^1+4\cdot5^0=375+25+10+4=\mathbf{414}$

次の10進数を[　]内の表し方で表せ．

(1) 29　[2進法]　(2) 77　[3進法]

解 (1) 29を順に2で割っていき，出てきた余りを逆順に並べればよい．よって，右の計算より，$29=\mathbf{11101_{(2)}}$

2) 29
2) 14…1
2) 7…0
2) 3…1
2) 1…1
0…1

(2) 77を順に3で割っていき，出てきた余りを逆順に並べればよい．よって，右の計算より，$77=\mathbf{2212_{(3)}}$

3) 77
3) 25…2
3) 8…1
3) 2…2
0…2

1 次の数を10進法で表せ．

(1) $100110_{(2)}$　(2) $1101101_{(2)}$　(3) $1212_{(3)}$　(4) $20121_{(3)}$

(5) $1432_{(5)}$　(6) $24011_{(5)}$　(7) $465_{(7)}$　(8) $1316_{(7)}$

2 次の10進数を[　]内の表し方で表せ．

(1) 87　[2進法]　(2) 201　[2進法]　(3) 188　[3進法]

(4) 615　[4進法]　(5) 414　[5進法]　(6) 2276　[7進法]

3 nは2以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 10進数の117をn進法で表すと$165_{(n)}$となった．nの値を求めよ．

(2) 10進数の89をn進法で表すと$324_{(n)}$となった．nの値を求めよ．

例題 2　n進法②

$345_{(7)}$を5進法で表せ．

解 10進法で表すと，$3\cdot7^2+4\cdot7+5=180$

この180を5進数になおすと，右の計算より，$\mathbf{1210_{(5)}}$

5) 180
5) 36…0
5) 7…1
5) 1…2
0…1

4 次の数を[　]内の表し方で表せ．

(1) $20110_{(3)}$　[2進法]　(2) $4103_{(5)}$　[8進法]　(3) $1550_{(6)}$　[7進法]

●ポイント

① n ($n\geqq2$) を位取りのもととして数を表す方法を**n進法**，n進法で表された数を**n進数**という．また，このときのnを**底**という．n進数の各位の数字は0以上$n-1$以下の整数である．

例題 3　n進法の小数①

次の数を10進法の小数で表せ．

(1)　$0.111_{(2)}$　　(2)　$0.124_{(5)}$

解　(1)　$0.111_{(2)}=1\cdot\frac{1}{2^1}+1\cdot\frac{1}{2^2}+1\cdot\frac{1}{2^3}=0.5+0.25+0.125=\mathbf{0.875}$

(2)　$0.124_{(5)}=1\cdot\frac{1}{5^1}+2\cdot\frac{1}{5^2}+4\cdot\frac{1}{5^3}=0.2+0.08+0.032=\mathbf{0.312}$

5　次の数を10進法の小数で表せ．

(1)　$0.011_{(2)}$　(2)　$0.1011_{(2)}$　(3)　$0.23_{(4)}$
(4)　$0.43_{(5)}$　(5)　$0.144_{(5)}$　(6)　$0.64_{(8)}$

例題 4　n進法の小数②

10進数0.375を６進法で表せ．

解　$0.375=\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{6^2}+\frac{a_3}{6^3}+\cdots\cdots$ とおき，両辺を６倍する．

$2.25=a_1+\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{6^2}+\cdots\cdots$ の整数部分を比較して，$a_1=2$

$0.25=\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{6^2}+\frac{a_4}{6^3}+\cdots\cdots$ の両辺を６倍して，$1.5=a_2+\frac{a_3}{6}+\frac{a_4}{6^2}+\cdots\cdots$，$a_2=1$

$0.5=\frac{a_3}{6}+\frac{a_4}{6^2}+\frac{a_5}{6^3}+\cdots\cdots$ の両辺を６倍して，$3=a_3+\frac{a_4}{6}+\frac{a_5}{6^2}+\cdots\cdots$，$a_3=3$

また，$a_4=a_5=\cdots\cdots=0$

以上より，$a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=3$ だから，$0.375=\mathbf{0.213_{(6)}}$

$$\begin{array}{r} 0.375 \\ \times\quad 6 \\ \hline 2.250 \\ \times\quad 6 \\ \hline 1.50 \\ \times\quad 6 \\ \hline 3.0 \end{array}$$

実際には上のように計算するとよい．

6　次の10進数を［　］内の表し方で表せ．

(1)　0.625　［２進法］　(2)　0.9375　［４進法］
(3)　0.688　［５進法］　(4)　0.875　［６進法］

例題 5　n進法の利用

自然数Nを３進法で表すと５桁の数$2x211_{(3)}$となり，７進法で表すと３桁の数$3y2_{(7)}$となる．このとき，x，yの値を求めよ．また，Nを10進法で表せ．

解　$2x211_{(3)}$の各位の数は０，１，２のいずれかであるから，$0\leqq x\leqq 2$　$3y2_{(7)}$の各位の数は０以上６以下の整数であるから，$0\leqq y\leqq 6$　$2x211_{(3)}$と$3y2_{(7)}$を10進法で表すと，

$2x211_{(3)}=2\cdot3^4+x\cdot3^3+2\cdot3^2+1\cdot3^1+1\cdot3^0=27x+184$，$3y2_{(7)}=3\cdot7^2+y\cdot7+2\cdot7^0=7y+149$

よって，$27x+184=7y+149$ であるから，$27x=7y-35$，$27x=7(y-5)$

$x=0$ のとき，$y=5$　これは$0\leqq y\leqq 6$ を満たす．$x=1$，２のとき，等式を満たす整数yは存在しない．したがって，$\mathbf{x=0}$，$\mathbf{y=5}$，$N=27\cdot0+184=\mathbf{184}$

●ポイント

①　n進法の小数では，小数点以下の位は$\frac{1}{n}$の位，$\frac{1}{n^2}$の位，$\frac{1}{n^3}$の位，……となる．

7　自然数Nを５進法で表すと３桁の数$4x2_{(5)}$となり，７進法で表すと３桁の数$22y_{(7)}$となる．このとき，x，yの値を求めよ．また，Nを10進法で表せ．

8　ある自然数Nを５進法で表すと３桁の数$abc_{(5)}$となり，８進法で表すと３桁の数$cba_{(8)}$となる．このとき，Nを10進法で表せ．

例題 6　２進法の加減

次の計算の結果を２進法で表せ．

(1)　$10110_{(2)}+10111_{(2)}$　　(2)　$10111_{(2)}-1011_{(2)}$

解　(1)　$10110_{(2)}+10111_{(2)}$
$=\mathbf{101101_{(2)}}$

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +10111 \\ \hline 101101 \end{array}$$

(2)　$10111_{(2)}-1011_{(2)}$
$=\mathbf{1100_{(2)}}$

$$\begin{array}{r} 10111 \\ -\ 1011 \\ \hline 1100 \end{array}$$

9　次の計算の結果を２進法で表せ．

(1)　$1101_{(2)}+1001_{(2)}$　(2)　$1011_{(2)}+1110_{(2)}$　(3)　$10011_{(2)}+11101_{(2)}$
(4)　$1010_{(2)}+111_{(2)}$　(5)　$1101_{(2)}+101_{(2)}$　(6)　$11110_{(2)}+1111_{(2)}$
(7)　$1010_{(2)}-101_{(2)}$　(8)　$1101_{(2)}-111_{(2)}$　(9)　$11011_{(2)}-1101_{(2)}$
(10)　$10100_{(2)}-1011_{(2)}$　(11)　$10011_{(2)}-1101_{(2)}$　(12)　$110101_{(2)}-11011_{(2)}$

例題 7　２進法の乗除

次の計算の結果を２進法で表せ．

(1)　$11011_{(2)}\times101_{(2)}$　　(2)　$101101_{(2)}\div11_{(2)}$

解　(1)　$11011_{(2)}\times101_{(2)}$
$=\mathbf{10000111_{(2)}}$

(2)　$101101_{(2)}\div11_{(2)}$
$=\mathbf{1111_{(2)}}$

(1)
$$\begin{array}{r} 11011 \\ \times\quad 101 \\ \hline 11011 \\ 11011 \\ \hline 10000111 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 1111 \\ 11\,\overline{)\,101101} \\ 11 \\ \hline 101 \\ 11 \\ \hline 100 \\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

10　次の計算の結果を２進法で表せ．

(1)　$101_{(2)}\times111_{(2)}$　(2)　$110_{(2)}\times101_{(2)}$　(3)　$1101_{(2)}\times110_{(2)}$
(4)　$1111_{(2)}\div101_{(2)}$　(5)　$10101_{(2)}\div11_{(2)}$　(6)　$110010_{(2)}\div101_{(2)}$

●ポイント

①　２進法の足し算の基本計算　$0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，$1+1=10$
　　引き算の基本計算　$0-0=0$，$1-0=1$，$1-1=0$，$10-1=1$
　　掛け算の基本計算　$0\times0=0$，$0\times1=0$，$1\times0=0$，$1\times1=1$

②　２進法の割り算は，10進法の割り算と同様，掛け算と引き算を組み合わせて行う．

例題 8　n進法の計算

次の計算の結果を4進法で表せ.

(1)　$233_{(4)}+123_{(4)}$　　(2)　$312_{(4)}\times 3_{(4)}$

解　右のような加法，乗法の表を作り，これらをもとにして計算するとよい.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

(1)　$233_{(4)}+123_{(4)}=\mathbf{1022_{(4)}}$　　$3+3=12\to 3+2+1=12\to 2+1+1=10$

(2)　$312_{(4)}\times 3_{(4)}=\mathbf{2202_{(4)}}$　　$2\times 3=12\to 1\times 3+1=10\to 3\times 3+1=22$

11　次の計算の結果を4進法で表せ.

(1)　$332_{(4)}+313_{(4)}$　　(2)　$322_{(4)}\times 2_{(4)}$　　(3)　$231_{(4)}+132_{(4)}\times 2_{(4)}$

12　次の計算の結果を5進法で表せ.

(1)　$342_{(5)}+123_{(5)}$　　(2)　$234_{(5)}\times 23_{(5)}$　　(3)　$322_{(5)}+213_{(5)}\times 2_{(5)}$

例題 9　循環小数

次の分数を循環小数で表せ.

(1)　$\dfrac{1}{6}$　　(2)　$\dfrac{43}{27}$

解　(1)　$\dfrac{1}{6}=0.1666\cdots\cdots \to \mathbf{0.1\dot{6}}$　　(2)　$\dfrac{43}{27}=1.592592\cdots\cdots \to \mathbf{1.\dot{5}9\dot{2}}$

次の循環小数を分数で表せ.

(1)　$0.\dot{5}$　　(2)　$0.\dot{3}1\dot{2}$

解　(1)　$x=0.\dot{5}$ とすると，$10x=5.\dot{5}$ だから，$10x-x=5$ より，$x=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

$$\begin{array}{rr} & 10x=5.555\cdots \\ -) & x=0.555\cdots \\ \hline & 9x=5 \end{array}$$

(2)　$x=0.\dot{3}1\dot{2}$ とすると，$1000x=312.\dot{3}1\dot{2}$ だから，$1000x-x=312$ より，$x=\dfrac{312}{999}=\mathbf{\dfrac{104}{333}}$

$$\begin{array}{rr} & 1000x=312.312312\cdots \\ -) & x=\ \ \ \ 0.312312\cdots \\ \hline & 999x=312 \end{array}$$

13　次の分数を循環小数で表せ.

(1)　$\dfrac{7}{15}$　　(2)　$\dfrac{26}{9}$　　(3)　$\dfrac{13}{33}$　　(4)　$\dfrac{80}{37}$

14　次の循環小数を分数で表せ.

(1)　$0.\dot{6}$　　(2)　$0.\dot{4}\dot{5}$　　(3)　$2.\dot{1}\dot{7}$　　(4)　$0.\dot{5}3\dot{1}$

●ポイント

①　小数第何位かまでで終わる小数を**有限小数**，小数部分が無限に続く小数を**無限小数**という．無限小数のうち，いくつかの数字の配列が繰り返されるものを**循環小数**という.

15　次の分数を小数で表したとき，[　]内の数字を求めよ.

(1)　$\dfrac{7}{27}$　[小数第50位]　　(2)　$\dfrac{25}{101}$　[小数第30位]　　(3)　$\dfrac{5}{7}$　[小数第100位]

16　$\dfrac{6}{7}$ を小数で表したとき，小数第1000位までに出てくるすべての数の和を求めよ.

例題 10　有限小数の判定

次の分数が有限小数であるかどうかを判定せよ.

(1)　$\dfrac{11}{320}$　　(2)　$\dfrac{3}{280}$

解　(1)　$320=2^6\cdot 5$ であり，分母の素因数は2と5だけである．よって，**有限小数**.

(2)　$280=2^3\cdot 5\cdot 7$ であり，分母の素因数に2と5以外の数が含まれる．よって，**有限小数でない**.

17　次の分数が有限小数であるかどうかを判定せよ.

(1)　$\dfrac{7}{64}$　　(2)　$\dfrac{39}{160}$　　(3)　$\dfrac{4}{75}$　　(4)　$\dfrac{27}{110}$　　(5)　$\dfrac{21}{240}$

18　n を2以上50以下の整数とするとき，$\dfrac{1}{n}$ が有限小数となるものは何個あるか.

例題 11　部屋割り論法

異なる4個の整数があるとき，その中には3で割ったときの余りが等しい2個の整数の組が必ず含まれていることを証明せよ.

解　整数を，3で割ったときの余り0，1，2によって3つの集まりに分類する.

異なる4個の整数を3つの集まりに振り分けていくと，部屋割り論法により，2個以上の整数が入る集まりが少なくとも1つ存在する.

よって，異なる4個の整数の中には3で割ったときの余りが等しい2個の整数の組が必ず含まれている.

19　異なる7個の整数があるとき，その中には差が6の倍数となるような2個の整数の組が必ず含まれていることを証明せよ.

20　$\dfrac{m}{n}$(m，n は整数)が有限小数でないならば，循環小数であることを証明せよ.

●ポイント

①　分母の素因数が2か5だけであれば，その分数は有限小数である.

②　一般に，$(n+1)$人を n 個の部屋に入れるとき，2人以上入っている部屋が少なくとも1つは存在する．このような考え方を**部屋割り論法**，または**鳩の巣原理**という.

③　有理数は，整数，有限小数，循環小数のいずれかである.

例題 12　分数の小数表示と記数法

次の分数を［　］内に示された記数法の小数で表せ．

(1)　$\dfrac{1}{4}$　［５進法］　　(2)　$\dfrac{1}{12}$　［６進法］

解　(1)　$\dfrac{1}{4}=\dfrac{a_1}{5}+\dfrac{a_2}{5^2}+\dfrac{a_3}{5^3}+\cdots\cdots$　①

とおく．①×5 より，

$1+\dfrac{1}{4}=a_1+\dfrac{a_2}{5}+\dfrac{a_3}{5^2}+\cdots\cdots$

となるから，$a_1=1$

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{a_2}{5}+\dfrac{a_3}{5^2}+\dfrac{a_4}{5^3}+\cdots\cdots$ において上と同様にして，$a_2=1$　以下同様にして，

$a_3=a_4=a_5=\cdots\cdots=1$ が成り立つ．

よって，$\dfrac{1}{4}=\mathbf{0.\dot{1}_{(5)}}$

(2)　$\dfrac{1}{12}=\dfrac{a_1}{6}+\dfrac{a_2}{6^2}+\dfrac{a_3}{6^3}+\cdots\cdots$　②

とおく．②×6 より，

$\dfrac{1}{2}=a_1+\dfrac{a_2}{6}+\dfrac{a_3}{6^2}+\cdots\cdots$ となるから，

$a_1=0$，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_2}{6}+\dfrac{a_3}{6^2}+\dfrac{a_4}{6^3}+\cdots\cdots$　③

③×6 より，$3=a_2+\dfrac{a_3}{6}+\dfrac{a_4}{6^2}+\cdots\cdots$ となるから，$a_2=3$　$0=\dfrac{a_3}{6}+\dfrac{a_4}{6^2}+\cdots\cdots$ より，

$a_3=a_4=\cdots\cdots=0$　よって，$\dfrac{1}{12}=\mathbf{0.03_{(6)}}$

〔注〕　10進法では，$\dfrac{1}{4}=0.25$ で有限小数だが，５進法では上のように循環小数である．また，10進法では，$\dfrac{1}{12}=0.08\dot{3}$ で循環小数だが，６進法では上のように有限小数である．

21　次の分数を［　］内に示された記数法の小数で表せ．

(1)　$\dfrac{1}{10}$　［５進法］　(2)　$\dfrac{1}{4}$　［３進法］　(3)　$\dfrac{3}{8}$　［５進法］　(4)　$\dfrac{5}{18}$　［６進法］

例題 13　ガウス記号

x の値が次のとき，$\left[\dfrac{3x-2}{5}\right]$ の値を求めよ．

(1)　$x=7$　　(2)　$x=-8$

解　(1)　$\dfrac{3x-2}{5}=\dfrac{3\cdot7-2}{5}=\dfrac{19}{5}=3.8$ より，

$[3.8]=\mathbf{3}$

(2)　$\dfrac{3\cdot(-8)-2}{5}=-\dfrac{26}{5}=-5.2$ より，

$[-5.2]=\mathbf{-6}$

22　x の値が次のとき，$\left[\dfrac{2x-5}{6}\right]$ の値を求めよ．

(1)　$x=5$　(2)　$x=-7$　(3)　$x=\pi$　(4)　$x=\sqrt{2}$

23　次の等式を満たす x，y の値の範囲を求めよ．

(1)　$[2x+3]=-3$　(2)　$\left[\dfrac{3x+1}{2}\right]=5$　(3)　$\begin{cases}2[x]-3[y]=14\\3[x]+2[y]=8\end{cases}$

24　$[a]=3$，$[b]=1$ であるとき，$[2a-3b]$ のとりうる値をすべて求めよ．

●ポイント

①　実数 x について，x 以下の最大の整数を $[x]$ と表す．［　］をガウス記号という．$[x]=n$ ならば，$n\leqq x<n+1$ が成り立つ．

混合問題

A

1　次の数を10進法で表せ．

(1)　$121022_{(3)}$　(2)　$31442_{(5)}$　(3)　$1.1011_{(2)}$　(4)　$0.312_{(4)}$

2　次の10進数を［　］内の表し方で表せ．

(1)　137　［４進法］　(2)　1368　［５進法］　(3)　0.816　［５進法］　(4)　0.125　［６進法］

3　次の計算の結果を２進法で表せ．

(1)　$110111_{(2)}+111010_{(2)}$　(2)　$11110_{(2)}-1101_{(2)}$　(3)　$101010_{(2)}-11101_{(2)}$

(4)　$11011_{(2)}\times110_{(2)}$　(5)　$11010_{(2)}\times111_{(2)}$　(6)　$1001101_{(2)}\div1011_{(2)}$

4　次の計算の結果を［　］内の表し方で表せ．

(1)　$3201_{(4)}-1312_{(4)}$　［４進法］　(2)　$202011_{(3)}\div122_{(3)}$　［３進法］

5　次の分数を［　］内に示された記数法の小数で表せ．

(1)　$\dfrac{7}{24}$　［10進法，６進法］　(2)　$\dfrac{5}{9}$　［10進法，７進法］

6　次の等式を満たす実数 x の値の範囲を求めよ．

(1)　$[x]^2+2[x]-24=0$　(2)　$[x][2x+1]=3$

B

7　ある数を４進法で表すと，小数第22位にはじめて０でない数字が現れる．この数を８進法で表すと，小数第何位にはじめて０でない数字が現れるか．

8　自然数 N を p 進法で表すと３桁の最大数となり，$p\times q$ 進法で表すと２桁の数15となる．このとき，N，p，q の値を求めよ．ただし，p は２以上の自然数で，q は自然数とする．

9　ある正の数 N を３進法で表すと，整数部分が２桁の循環小数 $xy.\dot{z}$ となる．また，$N-1$ を５進法で表すと，整数部分が２桁の循環小数 $zy.\dot{x}$ となる．このとき，x，y，z の値を求めよ．

■ヒント

7　例えば，小数第３位が０でない最小の数は，$0.001_{(4)}\left(=\dfrac{1}{4^3}\right)$ であり，小数第２位までが０で小数第３位が０でない数は，$0.01_{(4)}\left(=\dfrac{1}{4^2}\right)$ より小さい．このようなことをもとに考える．

8　p 進法では各桁の数字は，$p-1$ 以下である．また，p や q は10以下とは限らないことに注意．

9　循環小数を分数で表してから，x，y，z の方程式を立てる．

章末問題 A

1 15!の正の約数の個数を求めよ．

2 p が3より大きい素数のとき，p^2-1 は24の倍数であることを示せ．

3 方程式 $x^3-x^2+9x-5=0$ は整数解をもたないことを示せ．

4 次の各組の数の最大公約数，最小公倍数を求めよ．

(1) 3696，1144　　(2) 1548，6321，7826

5 3で割ると1余り，5で割ると2余り，11で割ると3余る3桁の自然数のうち，最大のものを求めよ．

6 次の問いに答えよ．

(1) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$ を因数分解せよ．

(2) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

7 座標平面において，x 座標，y 座標がともに整数である点 $(x,\ y)$ を格子点という．いま，互いに異なる5個の格子点を任意に選ぶと，その中に次の性質をもつ格子点が少なくとも一対は存在することを示せ．

「一対の格子点を結ぶ線分の中点がまた格子点となる.」

8 2つの正の数 x，y の和は $\dfrac{3}{4}$ であり，それぞれを6進法で表すと，$x=0.abc$，$y=0.cab$ となるという．x，y の値を求めよ．ただし，b，c はいずれも0でないとする．

9 次の問いに答えよ．

(1) x は実数，n は整数とするとき，$[x+n]=[x]+n$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 等式 $\left[2x-\dfrac{2}{3}\right]^2-3\left[2x+\dfrac{1}{3}\right]=15$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

章末問題 B

1 次の問いに答えよ．

(1) 1以上16以下の整数のうち，2乗して17で割ると2余る数をすべて求めよ．

(2) $x^2+17y=1974$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

2 a を3以上の奇数とするとき，a^2-a が10000で割り切れるような最小の a の値を求めよ．

3 a，b は互いに素な自然数で，p，q，r，s は自然数とする．$ps-qr=1$ ならば，$\dfrac{pa+qb}{ra+sb}$ は既約分数であることを証明せよ．

4 次の問いに答えよ．

(1) 15^{32} を37で割った余りを求めよ．

(2) 15^{63} を37で割った余りを求めよ．

5 a，b，c は $1<a<b<c$ を満たす整数とし，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れることを示せ．

(2) a，b，c の値を求めよ．

6 n を2の倍数でも5の倍数でもない自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 1，11，111，……，$\underbrace{111\cdots\cdots1}_{1\text{が}(n+1)\text{個}}$ の $(n+1)$ 個の数を考える．これらの数を n で割ったとき，余りが等しい2数が存在することを示せ．

(2) n の倍数の中には，n 桁を超えず，111……1の形をしたものが存在することを証明せよ．

7 12の倍数のうち，正であるものを5進法で表し，次のように小さい方から順に並べる．

$22_{(5)}$，$44_{(5)}$，$121_{(5)}$，$143_{(5)}$，$220_{(5)}$，……

(1) 67番目の数をいえ．

(2) $2200044_{(5)}$ は何番目の数か．

(3) $22_{(5)}+44_{(5)}+121_{(5)}+\cdots\cdots+2200044_{(5)}$ を計算し，5進法で表せ．

補講　合同式

1　合同式とその性質

2つの整数 a, b を自然数 m で割った余りが等しいとき，a と b は **m を法として合同である** といい，$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$ と表す．このような式を**合同式**という．例えば，$24=7\cdot3+3$, $10=7\cdot1+3$ より，24, 10を7で割った余りはともに3で等しいから，24と10は7を法として合同であり，$24\equiv10 \pmod 7$ となる．

合同式の性質　a, b, c, d が整数，m が自然数で，$a\equiv b \pmod m$, $c\equiv d \pmod m$ のとき，

[1]　$\boldsymbol{a+c\equiv b+d \pmod m}$　　[2]　$\boldsymbol{a-c\equiv b-d \pmod m}$

[3]　$\boldsymbol{ac\equiv bd \pmod m}$　　[4]　k が自然数のとき，$\boldsymbol{a^k\equiv b^k \pmod m}$

例えば，[1]を証明すると次のようになる．

〔証明〕　$a\equiv b \pmod m$ より，$a-b$ は m で割り切れるので，$a-b=mp$（p は整数）……①と書ける．
同様に，$c\equiv d \pmod m$ より，$c-d=mq$（q は整数）……②と書けるので，
①+②から，$(a-b)+(c-d)=mp+mq$, $(a+c)-(b+d)=m(p+q)$
よって，$a+c$, $b+d$ を m で割った余りが等しいので，$a+c\equiv b+d \pmod m$

1　上の合同式の性質の[2]～[4]を証明せよ．

2　次の合同式について，成り立つか成り立たないかを答えよ．

(1)　$17\equiv5 \pmod 6$　　(2)　$23\equiv13 \pmod 3$　　(3)　$33\equiv19 \pmod 7$

(4)　$94\equiv27 \pmod 8$　　(5)　$143\equiv0 \pmod{13}$　　(6)　$1000\equiv1 \pmod{37}$

2　負の数の合同

整数の合同は負の数についても考えることができる．

例1　5を法として考えると，$17=5\cdot3+2$, $-8=5\cdot(-2)+2$ より，$17\equiv-8 \pmod 5$

例2　7を法として考えると，すべての整数は，$7m$, $7m+1$, ……, $7m+6$（m は整数）と表されるが，右の計算より，$4\equiv-3$, $5\equiv-2$, $6\equiv-1 \pmod 7$ だから，すべての整数は，$7m$, $7m\pm1$, $7m\pm2$, $7m\pm3$ とも表せる．

$4=7\cdot0+4$　　$-3=7\cdot(-1)+4$
$5=7\cdot0+5$　　$-2=7\cdot(-1)+5$
$6=7\cdot0+6$　　$-1=7\cdot(-1)+6$

3　次の□にあてはまる負の整数を大きい方から2つ求めよ．

(1)　$2\equiv\square \pmod 3$　　(2)　$6\equiv\square \pmod 5$　　(3)　$15\equiv\square \pmod 4$

(4)　$31\equiv\square \pmod 7$　　(5)　$55\equiv\square \pmod{17}$　　(6)　$80\equiv\square \pmod{23}$

4　次の□にあてはまる10以下の自然数を求めよ．ただし，n は整数とする．

(1)　13を法とすると，すべての整数は，$\{13n,\ 13n\pm1,\ \cdots\cdots,\ 13n\pm\square\}$ と表せる．

(2)　12を法とすると，すべての整数は，$\{12n,\ 12n\pm1,\ \cdots\cdots,\ 12n\pm\boxed{ア},\ 12n+\boxed{イ}\}$ と表せる．

例題 1　余りを求める①

n は11で割って4余る整数であるとき，$3n^4+2n^2$ を11で割った余りを求めよ．

解　$n\equiv4 \pmod{11}$ より，$3n^4+2n^2\equiv3\cdot4^4+2\cdot4^2 \pmod{11}$ が成り立つ．
$3\cdot4^4+2\cdot4^2=3\cdot16^2+2\cdot16$, $16=11\cdot1+5$ より，$16\equiv5 \pmod{11}$ だから，
$3\cdot16^2+2\cdot16\equiv3\cdot5^2+2\cdot5=75+10=85=11\cdot7+8\equiv8 \pmod{11}$
よって，求める余りは8

5　n は13で割って5余る整数であるとき，次のものを13で割った余りを求めよ．

(1)　$3n^4-7n^2$　　(2)　$5n^5-3n^3+n^2$

6　n は23で割って21余る整数であるとき，$n^5+3n^3+n^2$ を23で割った余りを求めよ．

例題 2　余りを求める②

7^{100} を13で割った余りを求めよ．

解　$7^{100}=49^{50}$, $49\equiv-3 \pmod{13}$ より，$49^{50}\equiv(-3)^{50} \pmod{13}$　$(-3)^{50}=3^{50}=3^2\cdot3^{48}=9\cdot27^{16}$
$27\equiv1 \pmod{13}$ より，$9\cdot27^{16}\equiv9\cdot1^{16} \pmod{13}$　よって，求める余りは，$9\cdot1^{16}=\mathbf{9}$

7　次の数を[　]内の数で割った余りを求めよ．

(1)　3^{120}　[11]　　(2)　6^{100}　[19]　　(3)　2012^{200}　[7]

8　右のことを利用して，次の数を[　]内の数で割った余りを求めよ．

(1)　7^{1000}　[23]　　(2)　22^{2200}　[17]

フェルマーの小定理
p が素数で，a と p が互いに素ならば，$\boldsymbol{a^{p-1}\equiv1 \pmod p}$

9　$640=5\cdot2^7$ を用いて，$2^{32}+1$ が641で割り切れることを示せ．

例題 3　合同式を用いた証明①

n が自然数のとき，$13\cdot2^n+3\cdot7^{2n-1}$ は47の倍数であることを証明せよ．

解　$13\cdot2^n+3\cdot7^{2n-1}=13\cdot2^n+3\cdot7\cdot7^{2(n-1)}=13\cdot2^n+21\cdot49^{n-1}\equiv13\cdot2^n+21\cdot2^{n-1} \pmod{47}$
$13\cdot2^n+21\cdot2^{n-1}=13\cdot2\cdot2^{n-1}+21\cdot2^{n-1}=26\cdot2^{n-1}+21\cdot2^{n-1}=47\cdot2^{n-1}$ より，47の倍数である．

10　n が自然数のとき，$3^{4n+2}+5^{2n+1}$ は14で割り切れることを示せ．

11　整数 $a_n=19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めよ．

■ヒント

9　$640=5\cdot2^7$ より，$5\cdot2^7\equiv-1 \pmod{641}$ である．また，$2^{32}+1=16\cdot2^{28}+1$ であり，$16\equiv-625=-5^4 \pmod{641}$ であることに着目する．

例題 4　合同式を用いた証明②

a，b，c，d を整数とする．関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ がいずれも 3 で割り切れないならば，方程式 $f(x)=0$ は整数の解をもたないことを証明せよ．

解　3 を法とする合同式で考える．$f(x)=0$ が整数の解 α をもつと仮定する．(以下の式で，mod 3 は省略する．) このとき，$\alpha\equiv0$ または $\alpha\equiv1$ または $\alpha\equiv-1$ である．

[1]　$\alpha\equiv0$ のとき，a，b，c，d は整数なので，
$f(\alpha)=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d\equiv a\cdot0^3+b\cdot0^2+c\cdot0+d=f(0)$　$f(\alpha)=0$ から，$f(0)\equiv0$

[2]　$\alpha\equiv1$ のとき，同様に，$f(\alpha)=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d\equiv a\cdot1^3+b\cdot1^2+c\cdot1+d=f(1)$ から，$f(1)\equiv0$

[3]　$\alpha\equiv-1$ のとき，$f(\alpha)=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d\equiv a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d=f(-1)$ から，$f(-1)\equiv0$

以上より，$f(0)\equiv0$ または $f(1)\equiv0$ または $f(-1)\equiv0$　これは $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ がいずれも 3 で割り切れないことに矛盾する．したがって，方程式 $f(x)=0$ は整数の解をもたない．

12　2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ の係数 a，b，c が整数であり，$f(0)$ と $f(1)$ の値がともに奇数ならば，2 次方程式 $f(x)=0$ は整数の解をもたないことを証明せよ．

13　自然数 a，b，c，p について，ap^2+bp+c を 3 で割ると 1 余り，ap^4+bp^2+c を 3 で割ると 2 余る．このとき，b を 3 で割ったときの余りを求めよ．

3　1 次合同式

$ax\equiv b \pmod{m}$ ……①のような形の方程式を **1 次合同式**といい，①を満たす x をすべて求めることを **1 次合同式を解く**という．

例えば，$2x\equiv1 \pmod 3$ ……②を解くことを考えよう．すべての整数は $3m$，$3m+1$，$3m+2$ (m は整数)の形に分類されるから，これらを x にあてはめてみる．まず，$3m$ は明らかに不適である．次に，$2(3m+1)\equiv2 \pmod 3$，$2(3m+2)\equiv4\equiv1 \pmod 3$ だから，解は $x=3m+2$，すなわち，3 で割って 2 余る数全体である．よって，②の解は合同式を用いて，$x\equiv2 \pmod 3$ と表される．

合同式の解を $x\equiv p \pmod m$ と表すとき，p は整数を m で割ったときの余りである 0，1，2，……，$m-1$ のいずれかで代表させることが多い．

14　次の 1 次合同式を解け．

(1)　$3x\equiv1 \pmod 4$　　(2)　$3x\equiv4 \pmod 5$　　(3)　$5x\equiv2 \pmod 7$

4　1 次合同式の性質

$ax\equiv b \pmod m$ ……① について次のことが成り立つ．

(1)　a と m が互いに素ならば，①は法 m についてただ 1 つの解をもつ．これは合同式の解を代表する値 0，1，2，……，$m-1$ のうち，①を満たすものがただ 1 つという意味である．

(2)　a と m の最大公約数が d で，d が b の約数であるとき，①の解は，$\dfrac{a}{d}x\equiv\dfrac{b}{d}\left(\mathrm{mod}\,\dfrac{m}{d}\right)$ ……② の解になる．②の解は法 $\dfrac{m}{d}$ についてただ 1 つとなる．これらの性質と合同式の性質を駆使して 1 次合同式を解く方法を次の例題で紹介する．

例題 5　1 次合同式の解法

次の 1 次合同式を解け．

(1)　$15x\equiv2 \pmod{19}$　　(2)　$36x\equiv21 \pmod{39}$

解　(1)　$15x\equiv2 \pmod{19}$ ……①，$19x\equiv0 \pmod{19}$ ……②の 2 式を用いて変形していく．
②−① より，$4x\equiv-2 \pmod{19}$　2 と19は互いに素なので，$2x\equiv-1 \pmod{19}$ ……③
①−③×7 より，$\boldsymbol{x\equiv9 \pmod{19}}$

(2)　36と39の最大公約数は 3 だから，$12x\equiv7 \pmod{13}$ ……①
また，$13x\equiv0 \pmod{13}$ ……②　②−① より，$x\equiv-7 \pmod{13}$
すなわち，$\boldsymbol{x\equiv6 \pmod{13}}$

〔注〕　法が m ならば，$mx\equiv0$ の式をつくるのがポイントである．解の唯一性は保証されているので，これらを適当に変形して最終的に $x\equiv\cdots$ の形を作り出す．式変形は次のような性質を用いて行う．ただし，a，b，c は整数，m は自然数である．(各自証明してみるとよい．)

(ア)　$a\equiv b \pmod m$ ならば，$ac\equiv bc \pmod m$

(イ)　c と m が互いに素で，$ac\equiv bc \pmod m$ ならば，$a\equiv b \pmod m$

15　次の 1 次合同式を解け．

(1)　$13x\equiv3 \pmod 7$　　(2)　$28x\equiv20 \pmod{12}$　　(3)　$23x\equiv16 \pmod 5$

(4)　$45x\equiv10 \pmod{20}$　　(5)　$173x\equiv16 \pmod{31}$　　(6)　$618x\equiv108 \pmod{258}$

例題 6　不定方程式への利用

方程式 $103x+43y=1000$ ……①の整数解を求めよ．

解　$103x=-43y+1000$，$103=43\cdot2+17$，$1000=43\cdot23+11$ より，$17x\equiv11 \pmod{43}$ ……②
また，$43x\equiv0 \pmod{43}$ ……③　③−②×2 より，$9x\equiv-22 \pmod{43}$ ……④
④×2−② より，$x\equiv-55\equiv-12 \pmod{43}$ だから，$x=43t-12$ (t は整数)
よって，①から，$43y=1000-103(43t-12)$，$y=-103t+52$
以上より，$\boldsymbol{x=43t-12}$，$\boldsymbol{y=-103t+52}$ (**t は整数**)

16　次の方程式の整数解をすべて求めよ．

(1)　$551x-14y=250$　　(2)　$47x+238y=1000$

(3)　$32x+347y=820$　　(4)　$128x+19y=1700$

17　方程式 $13x+103y+67z=615$ の整数解を求めよ．

18　次の問いに答えよ．

(1)　11で割って 7 余り，135で割って88余る数を1485で割った余りを求めよ．

(2)　11で割って 3 余り，23で割って15余り，37で割って28余るような最小の自然数を求めよ．

19　3^{800} を2639で割った余りを求めよ．

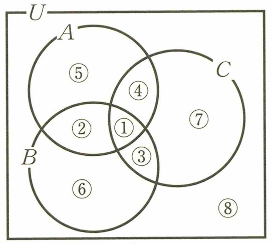
■ヒント

19　$2639=7\cdot13\cdot29$ なので，まず，3^{800} を 7，13，29で割った余りをそれぞれ求める．

研究と分析① 集合の要素の個数(図や表の利用)

集合の要素の個数について，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$，
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
という公式があるが，ここでは，要素の個数を，図や表を使って求める方法を学ぶ．

集合の要素の個数を求めるとき，円をかいて集合を表す図(ベン図)を利用することがある．この他に，下の例題のように表をかく方法がある．この表を使うと，縦と横の計算ができるので，問題によっては，便利な面がある．３つの集合で要素の個数を求める問題では，公式ですぐに求められない場合もあるので，ベン図の使い方にも慣れておくとよい．次のようなことに注意する．



・小さいものから順に記入する．
・分割した部分(右の図の①～⑧)を計算していく．
　(必要な部分だけの場合もある．)
・問題によっては，未知数をx，yなどで表して記入する．

１から1000までの整数のうちで，２の倍数であって３の倍数でないもの，２の倍数でも３の倍数でもないものの個数をそれぞれ求めよ．

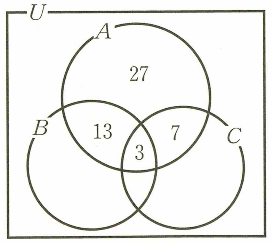
	A	$\overline{A}$	計
B	166	167	333
$\overline{B}$	334	333	667
計	500	500	1000

$n(U)=1000$，$n(A)=500$，
$n(B)=333$，$n(A\cap B)=166$
を記入して，残りを計算する．

解　１から1000までの整数を全体集合U，そのうち，２の倍数の集合をA，３の倍数の集合をBとする．右の表から，
２の倍数であって，３の倍数でないもの…**334個．**
２の倍数でも３の倍数でもないもの…**333個．**

１から100までの整数のうちで，２の倍数であって，３，５どちらの倍数でもないものの個数を求めよ．

解　１から100までの整数を全体集合U，そのうち，２の倍数の集合をA，３の倍数の集合をB，５の倍数の集合をCとする．
$n(A\cap B\cap C)=3$，$n(A\cap B)=16$，$n(A\cap C)=10$，$n(A)=50$
より，ベン図は右のようになり，求める個数は，**27個．**

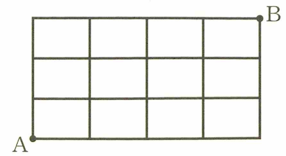


1　500以上1000以下の整数のうち，３の倍数ではなく７の倍数であるもの，３の倍数でも７の倍数でもないものの個数をそれぞれ求めよ．

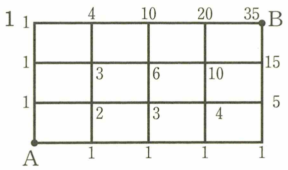
2　集合Xの要素の個数を$n(X)$と書く．集合A，B，Cがあり，次の条件(a)～(c)を満たしている．
(a)　$n(A)=8$，$n(B)=10$，$n(C)=9$
(b)　$n(A\cap B)=5$，$n(B\cap C)=7$，$n(A\cap C)=4$
(c)　$n(A\cap B\cap C)=3$
このとき，$n(A\cup B)$，$n((A\cap C)\cup(B\cap C))$，$n(A\cup B\cup C)$を求めよ．

研究と分析② 最短経路

右の図において，点Aから点Bに行く最短経路は，同じものを含む順列と考えて，$\dfrac{7!}{3!4!}=35$(通り)と求めることができることを学んでいる．ここでは，最短経路について，もう少し考察を深めることにする．



最短経路の数を求めるとき，右の図１のように，「ある交差点までの道順の数は，そこに合流する１つ前の交差点までの道順の数の和である」ことから，道順の数を順に記入していく方法がある．右の図２のように，少し変形した形では，この方法は有効である．

図１


また，対称性と積の法則から，図３のように，点P，Q，Rを通るものを分けて求めてもよい．
実際に求めてみると，
A→P→B…１通り，
A→R→B…$2^2=4$(通り)，
A→Q→B…$\dfrac{3!}{1!2!}\times\dfrac{3!}{2!1!}=9$(通り)より，$1+4+9=14$(通り)

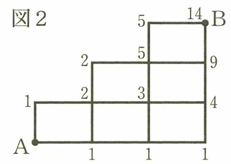
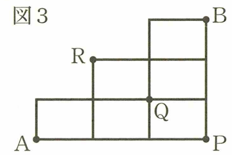
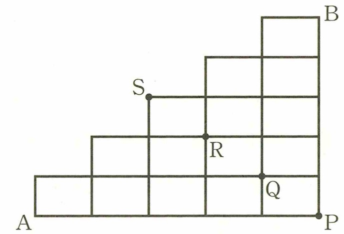
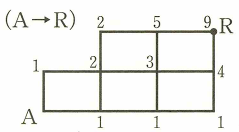
図２


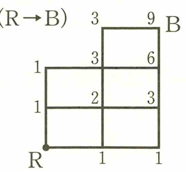
図３


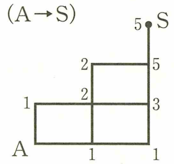
右の図において，点Aから点Bに行く最短経路は何通りあるか．

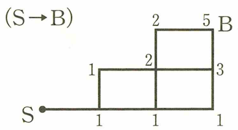


解　点P，Q，R，Sを通る経路に分けて求める．
A→P→B…１通り
A→Q→B
$\dfrac{5!}{1!4!}\times\dfrac{5!}{4!1!}=25$(通り)
A→R→B…$9^2=81$(通り)
A→S→B…$5^2=25$(通り)
以上から，
$1+25+81+25=$**132(通り)**

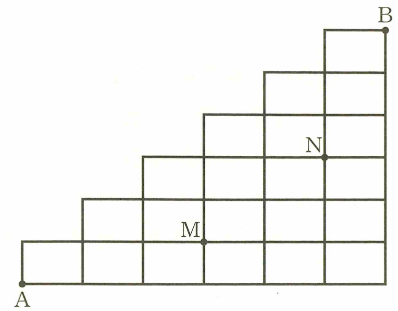
(A→R)


(R→B)


(A→S)


(S→B)


1　右の図において，次の問いに答えよ．
(1)　点Mと点Nを通って，点Aから点Bに行く最短経路は何通りあるか．
(2)　点Aから点Bに行く最短経路は何通りあるか．



研究と分析③　確率の最大

ここでは，独立試行の確率を利用して，確率の大小について考えてみる．

例えば，１つのさいころを35回投げるとき，１の目が何回出る確率が一番大きいだろうか．感覚的には，「１回の試行で１の目が出る確率は$\frac{1}{6}$だから，$35\times\frac{1}{6}=5.833\cdots\cdots$ で，５回か６回ぐらいじゃないか」という気もする．あながちまちがいでもなさそうだが，論理的でないため数学的には説得力に欠ける．この素朴な疑問は，下の例題のような方法で論理的に解決される．

１つのさいころを35回投げるとき，１の目がk回出る確率をP_kとする．

(1) $\dfrac{P_k}{P_{k-1}}$ $(1\leqq k\leqq 35)$ をkの式で表せ．

(2) (1)の結果を利用して，P_kを最大にするkの値を求めよ．

解 (1) $P_n={}_{35}C_n\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\left(\dfrac{5}{6}\right)^{35-n}=\dfrac{35!}{n!(35-n)!}\cdot\dfrac{5^{35-n}}{6^{35}}$ より，

$$\frac{P_k}{P_{k-1}}=\frac{35!}{k!(35-k)!}\cdot\frac{5^{35-k}}{6^{35}}\times\frac{(k-1)!(36-k)!}{35!}\cdot\frac{6^{35}}{5^{36-k}}=\boldsymbol{\frac{36-k}{5k}}$$

(2) $P_{k-1}<P_k$　すなわち，$\dfrac{P_k}{P_{k-1}}>1$ となるのは，$\dfrac{36-k}{5k}>1$ のときである．

$k>0$ であるから，両辺に$5k$をかけて，$36-k>5k$，$k<6$

同様にして，$P_{k-1}=P_k$，$P_{k-1}>P_k$ となるのは，$k=6$，$k>6$ のときである．

以上のことから，$P_0<P_1<\cdots\cdots<P_4<P_5=P_6>P_7>\cdots\cdots>P_{35}$ となる．

ゆえに，P_kを最大にするkの値は，$\boldsymbol{k=5,\ 6}$

---

1 赤玉２個，白玉４個が入った袋の中から２個の玉を同時に取り出して，色を調べてからもとにもどす操作を99回くり返す．このとき，取り出された２個の玉の中に赤玉が含まれている回数がk回である確率をP_kとする．P_kを最大にするkの値を求めよ．

2 １から８までの番号をつけた８枚のカードの中から４枚を同時に抜き取る．抜き取ったカードのうち，２番目に小さい番号をXとする．

(1) $X=2$ となる確率を求めよ．

(2) $X=k$ となる確率が最大となるようなkの値を求めよ．

3 校庭に，南北の方向に１本の白線が引いてある．ある人が，白線上のＡ点から西へ５mの地点に立ち，硬貨を投げて表が出たときは東へ１m，裏が出たときは北へ１mそれぞれ進む．白線に到達するまでこれを続ける．

(1) Ａ点から北へnmの地点に到達する確率P_nを求めよ．

(2) P_nを最大にするnの値を求めよ．

研究と分析④　整数に関する諸定理

整数は古くから研究されており，実に多くの定理が知られている．ここでは，約数や剰余に関する定理を紹介してみる．

①　約数の積に関する定理

nを２以上の自然数，nの正の約数の個数を$d(n)$とするとき，nの正の約数の積は$\boldsymbol{\sqrt{n^{d(n)}}}$である．

〔証明〕 nの正の約数を小さいものから順に，a_1，a_2，a_3，……，$a_{d(n)-2}$，$a_{d(n)-1}$，$a_{d(n)}$とし，これらの積をAとすると，

$A=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{d(n)-2}a_{d(n)-1}a_{d(n)}$ ……①，$A=a_{d(n)}a_{d(n)-1}a_{d(n)-2}\cdots\cdots a_3a_2a_1$ ……②

①×②より，$A^2=(a_1a_{d(n)})\cdot(a_2a_{d(n)-1})\cdot(a_3a_{d(n)-2})\cdots\cdots(a_{d(n)-1}a_2)\cdot(a_{d(n)}a_1)=n^{d(n)}$

したがって，$A=\sqrt{n^{d(n)}}$

例 12の正の約数は１，２，３，４，６，12で，これらの積は，$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot12=1728$

また，$12=2^2\cdot3$ より，正の約数の個数は，$(2+1)(1+1)=6$(個)だから，$\sqrt{12^6}=12^3=1728$

以下の２つの定理については，証明は数学Ａの範囲では困難なので，結果だけを述べる．

②　ウィルソンの定理

pが素数ならば，$(p-1)!+1$ はpで割り切れる．

これを合同式で表すと右のようになる．　$\boxed{\boldsymbol{(p-1)!+1\equiv0\ (\mathrm{mod}\ p)}}$

例 $p=7$ のときを考えると，$(7-1)!+1=721=7\cdot103$ だから，確かに７で割り切れる．

③　フェルマーの小定理

pが素数で，pとaが互いに素ならば，a^{p-1}をpで割った余りは１である．

これを合同式で表すと右のようになる．　$\boxed{\boldsymbol{a^{p-1}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p)}}$

例 $a=3$，$p=7$ のときを考えると，$3^{7-1}=3^6=729=7\cdot104+1$ だから，確かに余りは１である．

---

1 次の数の正の約数の積を求めよ．ただし，(2)ではa，b，cは異なる素数である．

(1) 30　　(2) $a^2b^3c^4$

2 次の数を67で割った余りを求めよ．

(1) 66!　　(2) 64!

3 次の数を〔　〕の中の数で割った余りを求めよ．

(1) 7^{5000} 〔17〕　　(2) 7^{5000} 〔391〕　　(3) 21^{5000} 〔153〕

4 aは561と互いに素であるとき，a^{560}を561で割った余りは１であることを証明せよ．

（ヒント：$561=3\cdot11\cdot17$ である．３，11，17にそれぞれフェルマーの小定理を用いよ．）