

高校準備講座 第3回 いろいろな因数分解

Pattern. 1 「おきかえ」の利用

★POINT★

「おきかえ」の利用 ⇒ 共通部分を文字に置き換えて、乗法公式に当てはめる。

(例題 1) 次の式を因数分解せよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 - y^2 + 2y - 1 \quad [15] \\ & = x^2 - (y^2 - 2y + 1) \\ & = x^2 - \left(\frac{y-1}{1}\right)^2 \\ & = x^2 - A^2 \\ & = (x+A)(x-A) \\ & = (x+y-1)(x-y+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^4 - 8x^2 - 9 \quad x^2 = A \quad [20] \\ & = A^2 - 8A - 9 \\ & = (A+1)(A-9) \\ & = (x^2+1)(x^2-9) \\ & = (x^2+1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{(x^2+3x)^2}{4} - 2\frac{(x^2+3x)}{4} - 8 \quad [18] \\ & = A^2 - 2A - 8 \\ & = (A+2)(A-4) \\ & = \left(\frac{x^2+3x}{4} + 2\right)\left(\frac{x^2+3x}{4} - 4\right) \\ & = (x+1)(x+2)(x-1)(x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & a^4 - 256b^4 \quad a^2 = A, 16b^2 = B \quad [20] \\ & = A^2 - B^2 \\ & = (A+B)(A-B) \\ & = (a^2+16b^2)(a^2-16b^2) \\ & = (a^2+16b^2)(a+4b)(a-4b) \end{aligned}$$

Pattern. 2 1つの文字に着目

★POINT★

② 1つの文字に着目して降べきの順にする ⇒ 「次数の低い文字」が主役！

(例題 2) 次の式を因数分解せよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^3 + x^2y - x^2 - y \quad [17] [12] \\ & = x^2y - y + x^2 - x^2 \\ & = (x^2-1)y - x^2(x-1) \\ & = (x+1)(x-1)y - x^2(x-1) \\ & = (x-1)\{(x+1)y + x^2\} \\ & = (x-1)(xy + y + x^2) \end{aligned}$$

Aに着目！
b,c 輪環順

$$\begin{aligned} (2) \quad & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ & = (b-c)a^2 + b^2c - b^2a + c^2a - bc^2 \\ & = (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + b^2c - bc^2 \\ & = (b-c)a^2 - (b-c)(b-c)a - bc(b-c) \\ & = (b-c)\{a^2 - (b-c)a - bc\} \\ & = (b-c)(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

$$(3) \quad 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2 \quad [19]$$

$$\begin{aligned} & = 2x^2 + (5y-3)x - 3y^2 - 5y - 2 \\ & = 2x^2 + (5y-3)x + (3y+1)(y-2) \quad [1] \\ & = \{2x + (3y+1)\}\{x + (y-2)\} \quad [2] \\ & = (2x + 3y + 1)(x + y - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{array}{r} 3x^2 + 1x - 2 \\ 1x - 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1 \\ -6 \end{array} \\ & \hline -5 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{array}{r} 2x^2 + 3y+1x - 5y-2 \\ 1x - 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3y+1 \\ 2y-4 \end{array}$$

$$\hline 5y-3$$

Pattern. 3 「自作自演」

★POINT★

「自作自演」 ⇒ 合計0を足して、「平方の差」の形を作る！

(例題 3) 次の式を因数分解せよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^4 + 4 \quad [2] \\ & = x^4 - 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ & = (x^2+2)^2 - (2x)^2 \\ & = (x^2+2+2x)(x^2+2-2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^4 - 7x^2 + 9 \quad [21] \\ & = x^4 - 6x^2 + 9 - x^2 \\ & = (x^2-3)^2 - x^2 \\ & = (x^2-3+x)(x^2-3-x) \end{aligned}$$

Pattern. 3 「並べ替え」の利用

★POINT★

「並べ替え」⇒ 組み合わせを考えて、「共通部分」や「公式が使える形」にする！

(例題 4) 次の式を因数分解せよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 \\ & = \frac{(x+5x+4)(x^2+5x+6)}{A} - 24 \\ & = (A+4)(A+6) - 24 \\ & = A^2 + 10A + 24 - 24 \\ & = A(A+10) \\ & = (x^2+5x)(x^2+5x+10) \\ & = x(x+5)(x^2+5x+10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^4 + 2x^3y - 2xy^3 - y^4 \\ & = x^4 - y^4 + 2x^2y^2 - 2xy^3 \\ & = (x^2+y^2)(x^2-y^2) + 2xy(x^2-y^2) \\ & = (x^2-y^2)\{x^2+y^2+2xy\} \\ & = (x+y)(x-y)(x+y)^2 \\ & = (x+y)^3(x-y) \end{aligned}$$

高校準備講座 第4回 3次式の展開と因数分解

< 3次式の公式 > (複号同順)

$$\text{展開} \begin{cases} \textcircled{1} (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ \textcircled{2} (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \end{cases}$$

$$\text{因数分解} \begin{cases} \textcircled{1} a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \\ \textcircled{2} a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \end{cases}$$

Pattern. 1 3次式の展開

★POINT★

- ・展開 $\Rightarrow$ すべての項が3次式となる。
- ・符号に注意!

(例題 1) 次の式を展開せよ。

※注「・」は「 $\times$ 」を表す。

$$\begin{aligned} (1) (x-2)^3 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-2) + 3 \cdot x \cdot (-2)^2 + (-2)^3 \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (2x+y)^3 &= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 + y^3 \\ &= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

$$(3) (3a+b)(9a^2-3ab+b^2)$$

$$\begin{aligned} &= (3a)^3 + b^3 \\ &= 27a^3 + b^3 \end{aligned}$$

$$(4) (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$$

$$\begin{aligned} &= x^3 - (2y)^3 \\ &= x^3 - 8y^3 \end{aligned}$$

Pattern. 2 3次式の因数分解

★POINT★

- ・3次式の 和 or 差 $\Rightarrow a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- ・4つの項で最前と最後が3乗の形 $\Rightarrow a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

(例題 2) 次の式を因数分解せよ。

$$(1) x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$(2) 64a^3 + 1 = (4a+1)(16a^2 - 4a + 1)$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3}{x^3} &= \frac{(x-3y)^3}{x^3} \\ &= \left(\frac{x-3y}{x}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \frac{8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3}{(2x)^3} &= \frac{(2x+3y)^3}{(2x)^3} \\ &= \left(\frac{2x+3y}{2x}\right)^3 \end{aligned}$$

Pattern. 3 特殊な因数分解

★POINT★

- ・ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \mp 3ab(a+b)$ を利用する。

(例題 3) 次の式を因数分解せよ。

$$\begin{aligned} (1) x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\ &= \frac{(x+y)^3}{x} + z^3 - 3xy \frac{(x+y+z)}{x} \\ &= A^3 + z^3 - 3xy(A+z) - \end{aligned}$$

$$= (A+z)^3 - 3Az(A+z) - 3xy(A+z)$$

$$= (A+z) \{ (A+z)^2 - 3zA - 3xy \}$$

$$= (A+z) \{ A^2 + 2zA + z^2 - 3zA - 3xy \}$$

$$= (A+z) (A^2 + z^2 - zA - 3xy)$$

$$= (x+y+z) \{ (x+y)^2 + z^2 - z(x+y) - 3xy \}$$

$$= (x+y+z) (x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - zx - yz - 3xy)$$

$$= (x+y+z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$(2) x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

$$= x^3 + y^3 + 1^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot 1$$

or (1) の結果を利用して、

$$= (x+y+z) (x^2 + y^2 + 1^2 - xy - y \cdot 1 - 1 \cdot x)$$

$$= (x+y+z) (x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)$$