(2) 7^{251} の下2桁は 7^{251} を100で割った余りに等しい。以下，100を法として考える。

$7^2\equiv 49$, $7^3\equiv 49\cdot 7\equiv 343\equiv 43$,

$7^4\equiv 43\cdot 7\equiv 301\equiv 1$

よって　$7^{251}\equiv (7^4)^{62}\cdot 7^3\equiv 1^{62}\cdot 43\equiv 43$

したがって，7^{251} の下2桁は　43

（練習8） $\boxed{\text{指針}}$ N が m の倍数 $\longrightarrow$ $N\equiv 0 \pmod{m}$

(1) $2^{6n-5}+3^{2n}\equiv 2\cdot 2^{6(n-1)}+(3^2)^n\equiv 2\cdot 64^{n-1}+9^n$

$\equiv 2\cdot(-2)^{n-1}+(-2)^n$

$\equiv -(-2)^n+(-2)^n\equiv 0 \pmod{11}$

よって，$2^{6n-5}+3^{2n}$ は11の倍数である。

(2) $4^{n+1}+5^{2n-1}\equiv 4^2\cdot 4^{n-1}+5\cdot 5^{2(n-1)}$

$\equiv 16\cdot 4^{n-1}+5\cdot 25^{n-1}$

$\equiv -5\cdot 4^{n-1}+5\cdot 4^{n-1}$

$\equiv 0 \pmod{21}$

よって，$4^{n+1}+5^{2n-1}$ は21の倍数である。

（練習9） 合同式を利用して，次のものを求めよ。

(1) (ア) 7^{203} を5で割った余り　(イ) 3000^{3000} を14で割った余り

(2) 83^{1234} の一の位の数

(1) (ア) $7\equiv 2 \pmod 5$ であり　$2^2\equiv 4 \pmod 5$,

$2^3\equiv 8\equiv 3 \pmod 5$,　$2^4\equiv 16\equiv 1 \pmod 5$

ゆえに　$2^{203}\equiv (2^4)^{50}\cdot 2^3\equiv 1^{50}\cdot 3\equiv 3 \pmod 5$

よって　$7^{203}\equiv 2^{203}\equiv 3 \pmod 5$

したがって，求める余りは　3

←7と2は5を法として合同であることに着目し，2^n に関する余りを調べる。7^2, 7^3 を5で割った余りを調べてもよいが，一般に 2^2, 2^3 の方がらく。

(イ) $3000\equiv 4 \pmod{14}$ であり　$4^2\equiv 16\equiv 2 \pmod{14}$,

$4^3\equiv 64\equiv 8 \pmod{14}$,　$4^4\equiv (4^2)^2\equiv 2^2\equiv 4 \pmod{14}$

4^k (k は自然数) の余りは，4，2，8を周期として繰り返され，

特に　$4^{3k}\equiv 8 \pmod{14}$

ゆえに　$4^{3000}\equiv 4^{3\cdot 1000}\equiv 8 \pmod{14}$

よって　$3000^{3000}\equiv 4^{3000}\equiv 8 \pmod{14}$

したがって，求める余りは　8

←3000を14で割った余りは4であるから，3000と4は14を法として合同。したがって，4^n に関する余りを調べる。

(2) $83\equiv 3 \pmod{10}$ であり　$3^2\equiv 9 \pmod{10}$,

←$83=10\cdot 8+3$

$3^3\equiv 27\equiv 7 \pmod{10}$,　$3^4\equiv 9^2\equiv 1 \pmod{10}$

ゆえに　$3^{1234}\equiv (3^4)^{308}\cdot 3^2\equiv 1^{308}\cdot 3^2\equiv 1\cdot 9\equiv 9 \pmod{10}$

←$1234=4\cdot 308+2$

よって　$83^{1234}\equiv 3^{1234}\equiv 9 \pmod{10}$

したがって，83^{1234} の一の位の数は　9

復習 WS⑨ 整数3（数 A 編） 解答

（練習1）整数 n は，ある整数 p，q を用いて

$n=5p+3$，$n=7q+4$ と表せる。

$5p+3=7q+4$ より

$5p-7q=1$ …①

$5\cdot 3-7\cdot 2=1$…② 　　整数解を1つ見つける。

①−②より

$5(p-3)-7(q-2)=0$

ゆえに　$5(p-3)=7(q-2)$

5と7は互いに素だから

$p-3=7k$（k は整数）　つまり　$p=7k+3$

と表せる。

よって　$n=5(7k+3)+3=35k+18$ より

35で割った余りは 18

（練習2）(1)　$3x^2+2xy-y^2=7$ 　　左辺を因数分解する。

$(3x-y)(x+y)=7$

$3x-y$，$x+y$ は整数だから，次のようになる。

$3x-y$	1	7	−1	−7
$x+y$	7	1	−7	−1

$\begin{cases} 3x-y=1,\ 7,\ -1,\ -7 \\ x+y=7,\ 1,\ -7,\ -1 \end{cases}$ を解くと 　　それぞれの組の連立方程式を解きます。

$\begin{cases} x=2,\ 2,\ -2,\ -2 \\ y=5,\ -1,\ -5,\ 1 \end{cases}$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 5)$，$(2,\ -1)$，

$(-2,\ -5)$，$(-2,\ 1)$

(2)　$x^2-xy-2y^2=4$

$(x+y)(x-2y)=4$

$x+y$，$x-2y$ は整数だから，次のようになる。

$x+y$	1	2	4	−1	−2	−4
$x-2y$	4	2	1	−4	−2	−1

$\begin{cases} x+y=1,\ 2,\ 4,\ -1,\ -2,\ -4 \\ x-2y=4,\ 2,\ 1,\ -4,\ -2,\ -1 \end{cases}$ を解くと 　　それぞれの組合せの連立方程式を解きます。

$\begin{cases} x=2,\ 2,\ 3,\ -2,\ -2,\ -3 \\ y=-1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1 \end{cases}$

よって

$(x,\ y)=(2,\ -1)$，$(2,\ 0)$，$(3,\ 1)$，$(-2,\ 1)$，

$(-2,\ 0)$，$(-3,\ -1)$

（練習3）(1)　$2x^2+xy-y^2-3x+3y-2$

$=2x^2+(y-3)x-(y^2-3y+2)$

$=2x^2+(y-3)x-(y-1)(y-2)$

$=(x+y-2)(2x-y+1)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y-2 \longrightarrow & 2y-4 \\ 2 & & -(y-1) \longrightarrow & -y+1 \\ \hline & & & y-3 \end{array}$$

(2)　$2x^2+xy-y^2-3x+3y=8$

$2x^2+xy-y^2-3x+3y-2=6$

$(x+y-2)(2x-y+1)=6$

$x+y-2$，$2x-y+1$ は整数だから，

次のようになる。

$x+y-2$	1	2	3	6	−1	−2	−3	−6	…①
$2x-y+1$	6	3	2	1	−6	−3	−2	−1	…②

①+②より

$3x-1=7,\ 5,\ -7,\ -5$ 　　$3x-1=7$，-5 は $x=\frac{8}{3}$，$-\frac{4}{3}$ となり x が整数にならない。

x は整数だから　$x=2,\ -2$

$x=2$ のとき

$x+y-2=2,\ 3$　より　$y=2,\ 3$

$x=-2$ のとき

$x+y-2=-1,\ -6$　より　$y=3,\ -2$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$，

$(-2,\ 3)$，$(-2,\ -2)$

（練習4）(1)　37 を 6 で割った余りは 1 である。

よって，37^{100} を 6 で割った余りは，1^{100} を 6 で割った余りに等しい。

したがって，37^{100} を 6 で割った余りは　1

別解　$37\equiv 1 \pmod 6$ であるから

$37^{100}\equiv 1^{100}\equiv 1 \pmod 6$

よって，37^{100} を 6 で割った余りは　1

(2)　5^2 を 8 で割った余りは 1 である。

よって，$5^{80}=(5^2)^{40}$ を 8 で割った余りは，1^{40} を 8 で割った余りに等しい。

したがって，5^{80} を 8 で割った余りは　1

別解　$5^2\equiv 1 \pmod 8$ であるから

$5^{80}\equiv(5^2)^{40}\equiv 1^{40}\equiv 1 \pmod 8$

よって，5^{80} を 8 で割った余りは　1

(3)　3^3 を 13 で割った余りは 1 である。

よって，$3^{100}=(3^3)^{33}\cdot 3$ を 13 で割った余りは，$1^{33}\cdot 3$ を 13 で割った余りに等しい。

したがって，3^{100} を 13 で割った余りは　3

別解　$3^3\equiv 1 \pmod{13}$ であるから

$3^{100}\equiv(3^3)^{33}\cdot 3\equiv 1^{33}\cdot 3\equiv 3 \pmod{13}$

よって，3^{100} を 13 で割った余りは　3

(4)　4^3 を 9 で割った余りは 1 である。

よって，$4^{200}=(4^3)^{66}\cdot 4^2$ を 9 で割った余りは，$1^{66}\cdot 4^2$ を 9 で割った余りに等しい。

したがって，4^{200} を 9 で割った余りは　7

別解　$4^3\equiv 1 \pmod 9$ であるから

$4^{200}\equiv(4^3)^{66}\cdot 4^2\equiv 1^{66}\cdot 4^2\equiv 7 \pmod 9$

よって，4^{200} を 9 で割った余りは　7

（練習5）(1)　$n\equiv 3 \pmod 8$ のとき

$n^2+2n+5\equiv 3^2+2\cdot 3+5$

$\equiv 20\equiv 4 \pmod 8$

よって，n^2+2n+5 を 8 で割った余りは　4

(2)　$n\equiv 15 \pmod{17}$ のとき

$3n^2+5n+9\equiv 3\cdot 15^2+5\cdot 15+9$

$\equiv 759\equiv 11 \pmod{17}$

よって，$3n^2+5n+9$ を 17 で割った余りは　11

別解　$3n^2+5n+9\equiv 3\cdot 15^2+5\cdot 15+9$

$\equiv 3\cdot 225+75+9$

$\equiv 3\cdot 4+7+9\equiv 28$

$\equiv 11 \pmod{17}$

(3)　$n\equiv 2 \pmod{35}$ のとき

$n^4+3n^3+4\equiv 2^4+3\cdot 2^3+4$

$\equiv 16+24+4\equiv 44$

$\equiv 9 \pmod{35}$

よって，n^4+3n^3+4 を 35 で割った余りは　9

（練習6）指針　係数が大きくて考えにくいから，まず合同式を用いて係数をできるだけ小さくする。

(1)　$241n+120\equiv 7n+3 \pmod 9$

$7n+3$ が 9 の倍数となるとき，k を自然数として，$7n+3=9k$ と表される。

両辺に 18 を足して　$7n+21=9k+18$

すなわち　$7(n+3)=9(k+2)$

7 と 9 は互いに素であるから，l を自然数として，$n+3=9l$ と表される。

ゆえに　　$n=9l-3$

よって，求める n は $l=1$ のときで　$n=6$

(2)　$373n+142\equiv 13n+7 \pmod{15}$

$13n+7$ が 15 の倍数となるとき，k を自然数として，$13n+7=15k$ と表される。

両辺に 45 を足して　$13n+52=15k+45$

すなわち　$13(n+4)=15(k+3)$

13 と 15 は互いに素であるから，l を自然数として，$n+4=15l$ と表される。

ゆえに　　$n=15l-4$

よって，求める n は $l=1$ のときで　$n=11$

（練習7）指針　一の位 $\longrightarrow$ 10 で割った余り

下2桁 $\longrightarrow$ 100 で割った余り

(1)　123^{122} の一の位は 123^{122} を 10 で割った余りに等しい。以下，10 を法として考える。

$123\equiv 3$，$123^2\equiv 3^2\equiv 9$，$123^3\equiv 3^3\equiv 7$，

$123^4\equiv 3^4\equiv 1$

よって　　$123^{122}\equiv(123^4)^{30}\cdot 123^2\equiv 1^{30}\cdot 9\equiv 9$

したがって，123^{122} の一の位は　9