

3章 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ (ただし、 $a \neq 0$)

1. 2次方程式の解き方

(1) 因数分解の利用

☆ 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が $(x-p)(x-q) = 0$ と因数分解できる
とき、その2次方程式の解は $x = p, q$ となる。

(例1) 次の方程式を解け

① $x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x+1)(x-6) = 0$

$$\begin{pmatrix} x+1=0 & x-6=0 \\ x=-1 & x=6 \end{pmatrix}$$

$$x = -1, 6$$

② $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$(3x-2)^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3x-2=0 \\ 3x=2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ (重解)}$$

③ $4x^2 - 25 = 0$

$(2x+5)(2x-5) = 0$

$$\begin{pmatrix} 2x+5=0 & 2x-5=0 \\ 2x=-5 & 2x=5 \\ x=-\frac{5}{2} & x=\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$x = \pm \frac{5}{2}$$

④ $x^2 - 6x = 0$

$x(x-6) = 0$

$$\begin{pmatrix} x=0, & x-6=0 \\ & x=6 \end{pmatrix}$$

$$x = 0, 6$$

☆ $(ax-b)(cx+d) = 0$ の解は

$$\Rightarrow x = \frac{b}{a}, -\frac{d}{c}$$

(2) 平方根の利用

(例2) $ax^2 - b = 0$ の解き方平方根 $\rightarrow (\pm)$ をつける!

① $x^2 - 49 = 0$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm 7 \leftarrow \text{平方根}$$

② $5x^2 = 8$

$$x^2 = \frac{8}{5}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{8}{5}} \leftarrow \text{平方根}$$

$$x = \pm \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \leftarrow \text{有理化}$$

$$x = \pm \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

③ $3x^2 - 3 = 45$

$$3x^2 = 48$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4 \leftarrow \text{平方根}$$

(例3) $(x+a)^2 = b$ の解き方

① $(x+2)^2 = 16$

$x+2 = \pm 4$ $\leftarrow$ 平方根

$x = -2 \pm 4$

$x = -2+4, -2-4$

$x = 2, -6$

② $3(x+5)^2 - 2 = 4$

$3(x+5)^2 = 6$

$(x+5)^2 = 2$

$x+5 = \pm \sqrt{2}$ $\leftarrow$ 平方根

$x = -5 \pm \sqrt{2}$

(3) 平方完成による解き方 (両辺に x の係数の半分の2乗を加えて平方の形を作る。)

☆ $x^2 + 2bx + c = 0$

$x^2 + 2bx = -c$

$x^2 + 2bx + b^2 = -c + b^2$ $\leftarrow$

$(x+b)^2 = b^2 - c$

$x^2 + bx + c = 0$

$x^2 + bx = -c$

$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ $\leftarrow$

$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$

(例4) ① $x^2 - 6x + 4 = 0$

$x^2 - 6x = -4$

$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$

$(x-3)^2 = 5$ $\leftarrow$ 平方根

$x-3 = \pm \sqrt{5}$

$x = 3 \pm \sqrt{5}$

② $x^2 - 5x + 2 = 0$

$x^2 - 5x = -2$

$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{8}{4} + \frac{25}{4}$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$

$x - \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ $\leftarrow$ 平方根

$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$