

1. 次の式を因数分解せよ。【各 3 点】

(1) $x^2 + 4xy + 3y^2 + x + 5y - 2$

(2) $2x^2 + xy - y^2 + 7x - 5y - 4$

(3) $64a^4 + b^4$

(4) $81x^4 + 32x^2 + 4$

2. 1. 次の式を展開せよ。【各 2 点】

(1) $(a-3)^3$

(2) $(2a+b)^3$

(3) $(x+3)(x^2-3x+9)$

(4) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$

類題 ※まちがい 1 問につき類題を 1 問以上やってくる。○つけも忘れずに。

1. (1)(2) → P.6 の 1 9

(3)(4) → P.7 の 2 1

2. (1)(2)→P.7-22(1)~(4) (3)(4)→P.7-22(5)~(8)

<Challenge!!> (各+5点)

① $a^4 + a^2 + 1 - 2ab - b^2$

② $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 4xy + 1$

③ $x^4 + x^2 - 2ax - a^2 + 1$

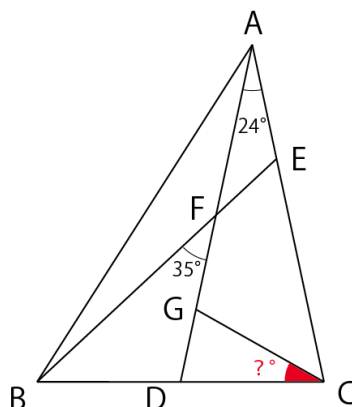
④ $a^3 - 3ab - b^3 - 1$

<角度問題>

下の図において、 **$BD=DC$** 、 **$AD=AC$** 、

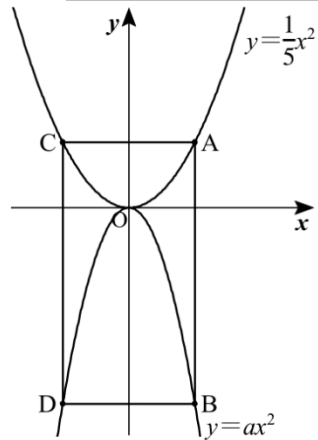
$BF=DF+DG$ となっているとき、

$\angle DCG$ の角度は?

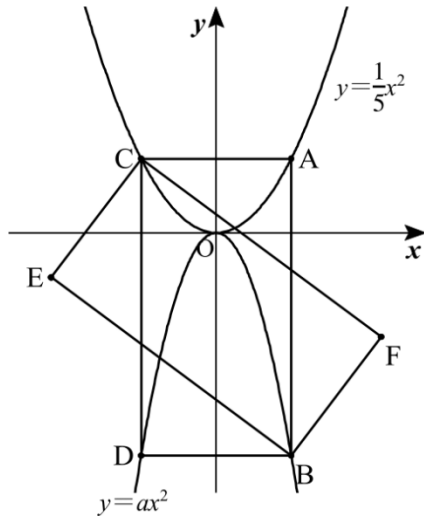


<関数>

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{5}x^2$ のグラフ上に点 A があり、点 A を通り、 y 軸に平行な直線と関数 $y = ax^2$ のグラフとの交点を B とする。点 A の x 座標は 5 で、点 B の y 座標は -15 である。また、2 点 A, B と y 軸に関して対称な点をそれぞれ C, D とし、長方形 ACDB をつくる。このとき、次の (1) ~ (3) の問いに答えなさい。ただし、 $a < 0$ とする。



- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 2 点 B, C を通る直線の式を求めなさい。
- (3) 下の図のように、長方形 ACDB と合同な長方形 CEBF をかいた。このとき、2 点 E, F を通る直線の式を求めなさい。



※ 配点
① ~ ⑫
各
0.5
点

得点

⑪ ソデをまくる	⑨ ミヤゲを買う	⑦ サシツカエない	⑤ カンヌシの正装	③ サツソク探してくる	① 泣いてアヤマル
⑫ ショウギを指す	⑩ 親ユズリの性格	⑧ カゼをひく	⑥ 下宿にコモル	④ においをカグ	② レイラクした姿

中 三 国 語 漢 字 テ ス ト 5 氏 名
次の文のカタカナを漢字に直せ。(送り仮名もかく)

4月7日テスト 3/21

$$\begin{aligned}
 (1) & x^2 + 4xy + 3y^2 + x - 5y - 2 \\
 &= x^2 + (4y+1)x - 3y^2 + 5y - 2 \\
 &= x^2 + (4y+1)x + (3y-1)(y+2) \\
 &= (x+3y-1)(x+y+2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{1} \begin{array}{r} 3x^2 + 0x + 7 \\ 3x^2 - 1x \rightarrow -1 \\ \hline 1x + 2 \rightarrow 6 \end{array} \\
 \textcircled{2} \begin{array}{r} 3y^2 + 0y + 7 \\ 3y^2 - 1y \rightarrow 3y - 1 \\ \hline 1y + 2 \rightarrow y + 2 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & 2x^2 + xy - y^2 - 7x - 5y - 4 \\
 &= 2x^2 + (y-7)x - y^2 - 5y - 4 \\
 &= 2x^2 + (y-7)x + (-y-4)(y+1) \\
 &= (2x - y - 1)(x - y + 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{1} \begin{array}{r} -1x^2 - 4x \rightarrow -4 \\ 1x^2 + 1x \rightarrow -1 \\ \hline -5 \end{array} \\
 \textcircled{2} \begin{array}{r} 2x^2 - (y+1)x \rightarrow -y-1 \\ 1x^2 - (-y-4)x \rightarrow 2y+8 \\ \hline y+7 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & 64a^4 + b^4 \\
 &= 64a^4 + 16a^2b^2 + b^4 - 16a^2b^2 \\
 &= (8a^2 + b^2)^2 - (4ab)^2 \\
 &= (8a^2 + b^2 + 4ab)(8a^2 + b^2 - 4ab) \\
 &= (8a^2 + 4ab + b^2)(8a^2 - 4ab + b^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & 81x^4 + 32x^2 + 4 \\
 &= 81x^4 + 36x^2 + 4 - 4x^2 \\
 &= (9x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
 &= (9x^2 + 1 + 2x)(9x^2 + 2 - 2x) \\
 &= (9x^2 + 2x + 2)(9x^2 - 2x + 2)
 \end{aligned}$$

2(1) $(a-3)^3$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot (-3) + 3a(-3)^2 + (-3)^3 \\
 &= a^3 - 9a^2 + 27a - 27
 \end{aligned}$$

(2) $(2a+b)^3$

$$\begin{aligned}
 &= (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 + b^3 \\
 &= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

(3) $(x+3)(x^2-3x+9)$

$$= x^3 + 27$$

(4) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$

$$= 8x^3 - 27$$

<Challenge!!> 解答

$$\textcircled{1} a^4 + a^2 + 1 - 2ab - b^2 = (a^2 + 1 + a + b)(a^2 + 1 - a - b)$$

$$\textcircled{2} x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 4xy + 1 = (xy - x + y + 1)(xy + x - y + 1)$$

$$\textcircled{3} x^4 + x^2 - 2ax - a^2 + 1 = (x^2 + x + a + 1)(x^2 - x - a + 1)$$

$$\textcircled{4} a^3 - 3ab - b^3 - 1 = (a - b - 1)(a^2 + ab + b^2 + a - b + 1)$$

<角度問題>

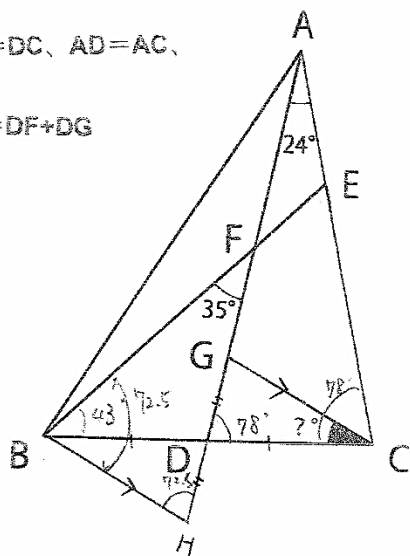
<関数> 2022 年度千葉県

$$\angle DCG = 29.5^\circ$$

$$(1) a = -\frac{3}{5} \quad (2) y = -2x - 5 \quad (3) y = -\frac{2}{11}x - 5$$

$BD = DC, AD = AC,$

$BF = DF + DG$



AD上に $HD = GD$ とするHを取る

$\triangle BHD \equiv \triangle CGD$ より

$BH \parallel GC$

$\triangle ADC$ は二等辺三角形だから

$$\angle ADC = \angle ACD = \frac{180 - 24}{2} = 78^\circ$$

$$\triangle FBD \text{ で } \angle FBD = 78 - 35 = 43^\circ$$

$\triangle FBH$ は二等辺三角形だから

$$\angle FBH = \frac{180 - 43}{2} = 72.5^\circ$$

$$\angle DBH = 72.5 - 43 = 29.5^\circ$$

$$\angle DCG = \angle DBH = \underline{29.5^\circ}$$

<Challenge!!>

$$\textcircled{1} a^4 + a^2 + 1 - 2ab - b^2$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ &= a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= (a^2 + 1)^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= (a^2 + 1) - (a + b)^2 \\ &= \{a^2 + 1 + (a + b)\} \{a^2 + 1 - (a + b)\} \\ &= (a^2 + 1 + a + b)(a^2 + 1 - a - b) \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} x^2y^2 - x^2 - y^2 + 4xy + 1$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ &= x^2y^2 + 2xy + 1 - x^2 - 2xy - y^2 \\ &= (xy + 1)^2 - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (xy + 1)^2 - (x - y)^2 \\ &= \{xy + 1 + (x - y)\} \{xy + 1 - (x - y)\} \\ &= (xy + 1 + x - y)(xy + 1 - x + y) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} x^4 + x^2 - 2ax - a^2 + 1 \quad (\textcircled{1} \text{ と同じ!})$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 - 2ax - a^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - (x^2 + 2ax + a^2) \\ &= (x^2 + 1)^2 - (x + a)^2 \\ &= \{x^2 + 1 + (x + a)\} \{x^2 + 1 - (x + a)\} \\ &= (x^2 + 1 + x + a)(x^2 + 1 - x - a) \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \underline{a^3 - 3ab - b^3 - 1}$$

$$= \underline{(a-b)^3 + 3ab(a-b) - 3ab - 1}$$

$$= \underline{(a-b)^3 - 1} + 3ab(a-b-1)$$

$$= A^3 - 1 + 3ab(A-1)$$

$$= (A-1)^3 - 3A(-1)(A-1) + 3ab(A-1)$$

$$= (A-1) \{ (A-1)^2 + 3A + 3ab \}$$

$$= (A-1) (A^2 - 2A + 1 + 3A + 3ab)$$

$$= (a-b-1) \{ (a-b)^2 - 2(a-b) + 1 + 3(a-b) + 3ab \}$$

$$= (a-b-1) (a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1 + 3a - 3b + 3ab)$$

$$= (a-b-1) (a^2 + ab + b^2 + a - b + 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \text{ 利用} \\ (b = -b \text{ 利用}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-b = A \text{ とおく} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \text{ 利用} \\ (a=A, b=-1 \text{ 利用}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a-b \text{ に戻す} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \} \text{の中を整理} \end{array} \right.$$

※④は普通「 $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ 」を利用して解きなさい。」といわれることが多いです。

こんなにゴリゴリ計算しない。

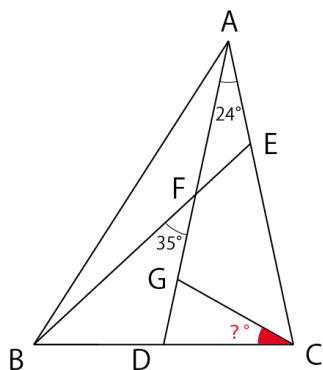
<角度問題と関数の解説>長いよ！

今回は 2012 年のジュニア大会の決勝問題。意味深な問題設定が特徴的な角度問題です。

条件が意味深すぎるので方針は立てやすいかも。。。？

【問題】難易度：★★★★☆

下の図において、 $BD=DC$ 、 $AD=AC$ 、 $BF=DF+DG$ となっているとき、角 DCG の角度は？



【解説】↓

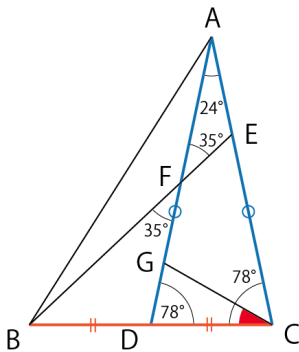
1・【鉄則その1・図は自分で描く】

二等辺三角形 ACD を初めに描いて、BD を付け足すという手順で描けば作図はフリーハンドでもさほど難しくないでしょう。G の位置が少し難しいですが、目算で BF と DF の差になりそうな位置を見つけましょう。

2・【鉄則その2・数値を書き入れる】

いつも通り等辺には印をつけて強調し、図がごちゃごちゃしない程度に角度を書き入れておきましょう。

ここで着目すべきは「 $BD=DC$ という条件からは角度の情報が引き出せない」ということです。次の段階でうまく操作によってこの条件が活きてくるはずですが、現段階では？に対してめぼしい情報は得られません。



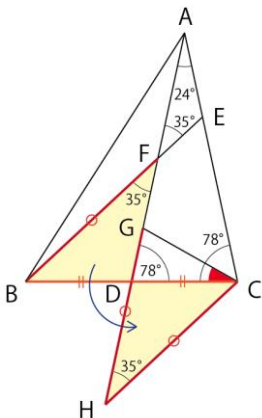
3・【鉄則その3・関連性を探る】

意味深な辺の長さの条件「 $BF=DF+DG$ 」が今回の問題の鍵であることは皆さんもお分かりでしょう。こんなにあからさまに作為的な条件も珍しいものです。

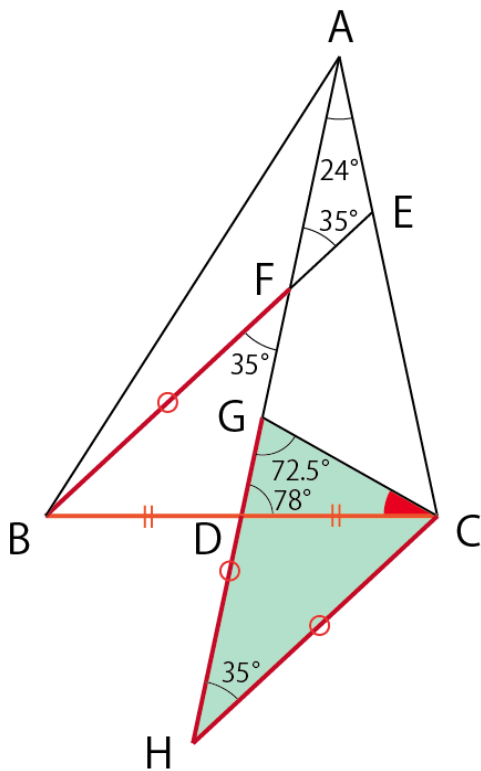
これまで様々な問題で出てきた「分散した角度の条件は1箇所に集める」という手法と類似の手法を使用しましょう。

図形問題、特に角度問題では有名三角形や二等辺三角形が役に立つという経験則が染み付いていますから、この条件から「二等辺三角形が作れる」という発想に至ります。

さらに、前の段階で目をつけていた $BD=DC$ もうまく使ってやりましょう。



上の図のように三角形 BDF をくるっと回転させて BD と DC が重なるようにくっつけます。すると、「 $BF=DF+DG$ 」によって三角形 CGH は二等辺三角形となります。



すると、図のようにこの二等辺三角形の等角は 72.5° とわかります。よって、三角形 CDG に着目して、

? = 29.5°

となります。

【まとめ】

- 分散している条件は1箇所に集める
- 等辺が出てきたらとりあえずくっつける
- 他の条件とコンビネーションで使えないか考える

大問2（関数）

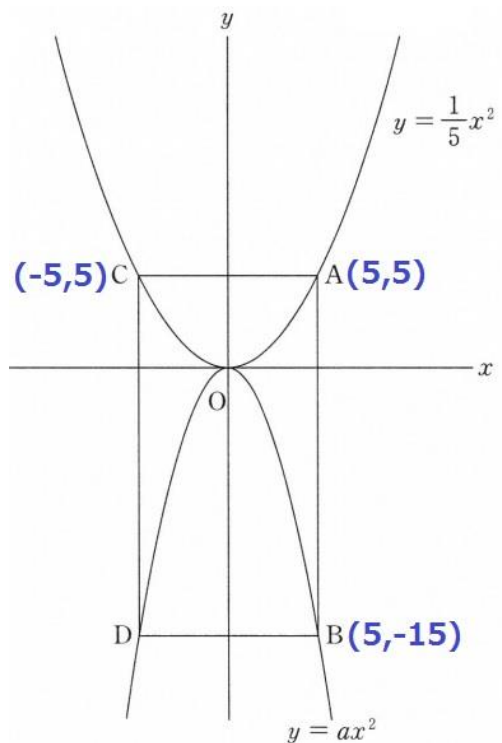
(1)

B (5、-15) を $y = a x^2$ に放り込む。

$$-15 = 25 a$$

$$a = -3/5$$

(2)



$y = 1/5 x^2$ に $x = 5$ を代入して、A (5、5)

A を y 軸について対称移動した C (-5、5)

C (-5、5) $\Rightarrow$ B (5、-15)

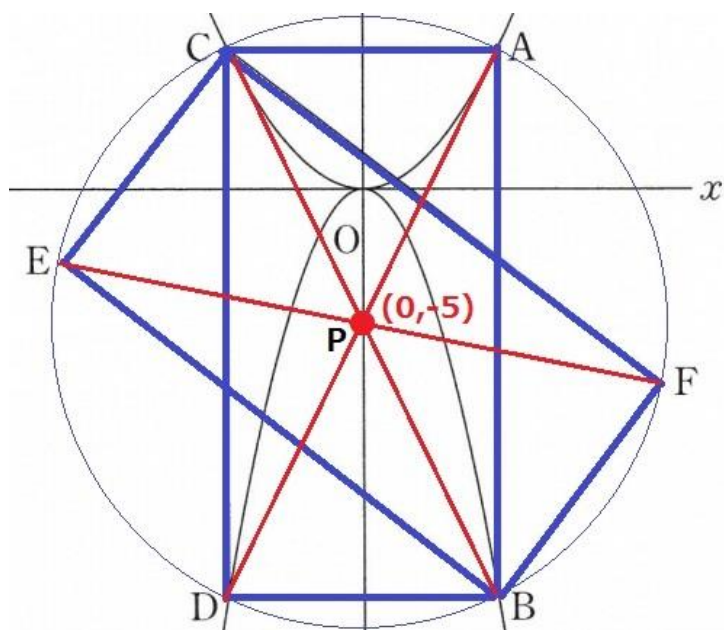
右に 10、下に 20 だから、傾きは $-20/10 = -2$

C から右に 5、下に 10 移動して、切片は $5 - 10 = -5$

$$y = -2x - 5$$

(3)

艱難辛苦(ゝノ・ω・`)



対角線の交点を P とする。

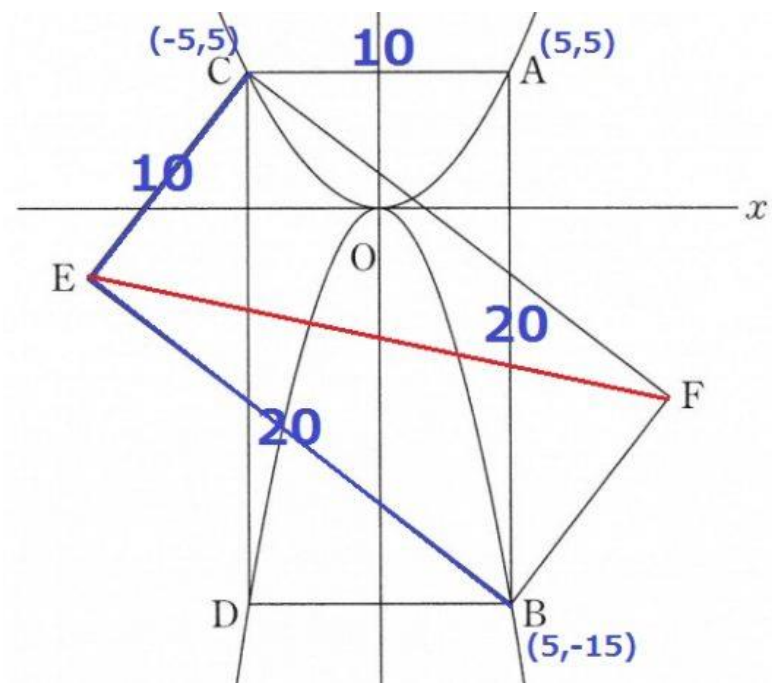
P は長方形の重心にあたり、対角線 B C の中点で (0、-5)。

(* 前問の式の切片にあたる)

すべての頂点は P C を半径とする同一円周上にある。

つまり、長方形 C E B F は回転の中心を P として長方形 A C D B を回転移動させた図形。

対角線 E F の切片も -5 である。



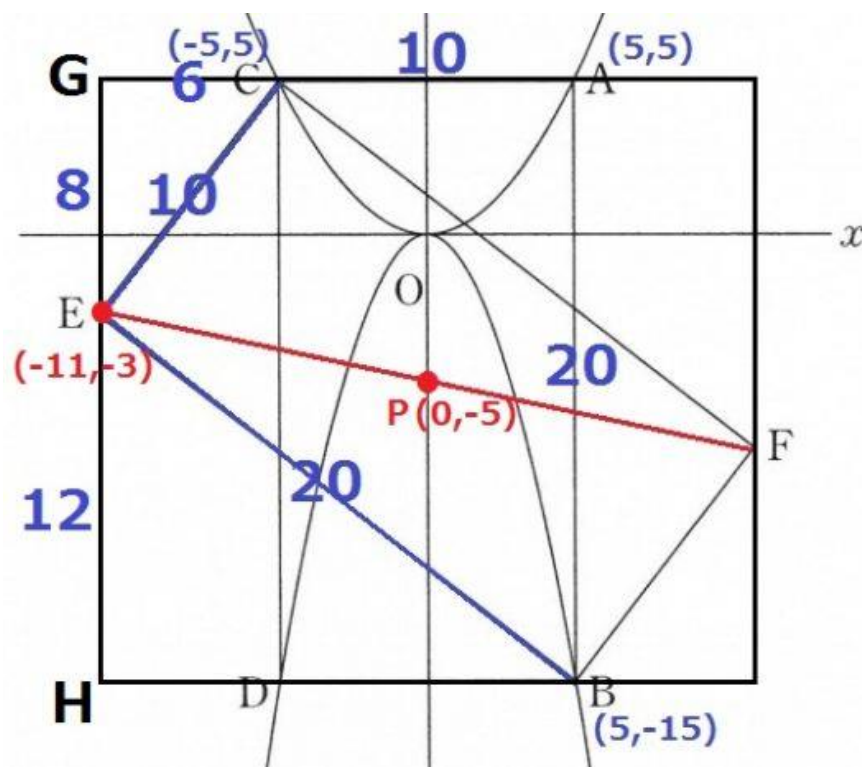
設定がシンプルゆえ、使える情報といえば長方形の長さくらいしかない(;´ω`)

そのなかで特に気になるのが**ナナメの 10(CE)と 20(EB)**。

$$x^2 + 4x - 60$$

$$= (x + 10)(x - 6) = 0$$

x は長さなので $x > 0$ より、 $x = 6$



$$GC = 6、EH = 6 \times 2 = 12$$

$$GE = 20 - 12 = 8$$

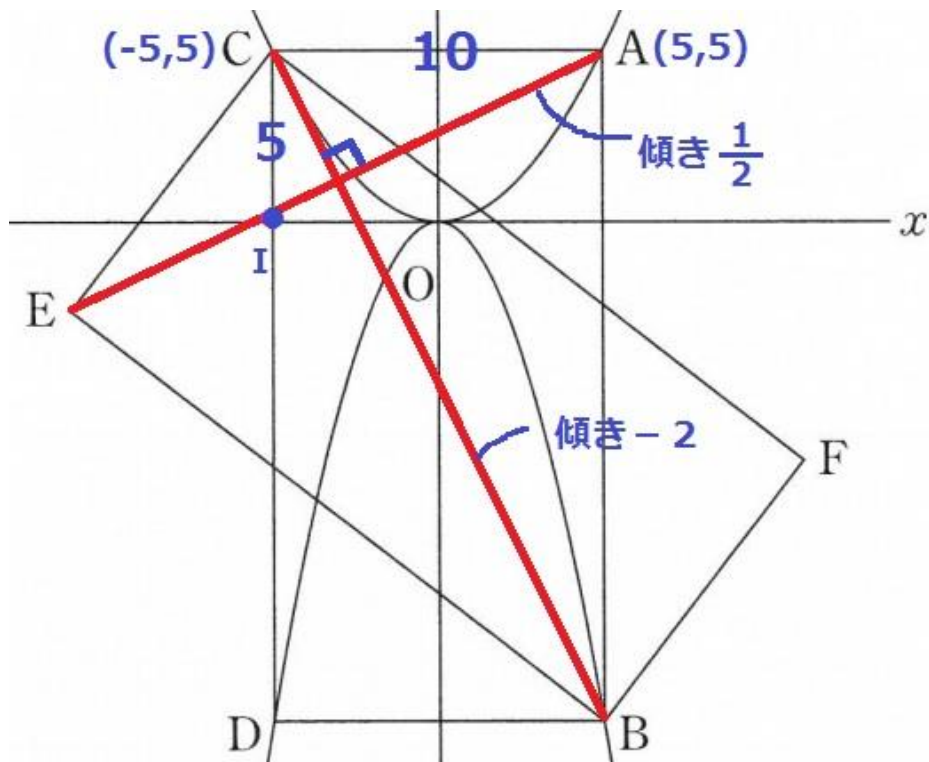
C (- 5、 5) から左に 6、下に 8 移動して E (- 11、 - 3) 。

E から P までは右に 11、下に 2 だから、傾きは $- 2 / 11$ 。

したがって、EF は $y = - 2 / 11 x - 5$

大変。(つд`。)。。

@別解@



$\triangle ABC$ と $\triangle EBC$ は合同な長方形の半分で合同だから、

BC を対称の軸とすると A と E は対称の点にある。

ということは、 AE と BC は垂直に交わっている。

BC の傾きは -2 。

直交する2直線の傾きの積は -1 なので、 AE の傾きは $1/2$ 。

CD と x 軸の交点を I とする。

$CA=10$ 、 $CI=5$ で I の傾きも $1/2$ だから、 I は AE 上の点である。

