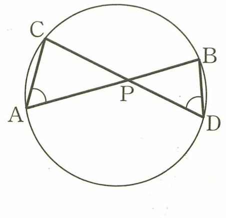
例題 9　方べきの定理①

円の２つの弦AB，CD，またはそれらの延長が，円周上にない点Pで交わるならば，

PA·PB=PC·PD

が成り立つことを証明せよ．



解　Pが円の内部，外部のいずれにある場合も同様に証明することができる．

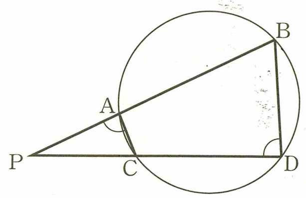
△PACと△PDBにおいて，

∠APC=∠DPB，∠CAP=∠BDP

であるから，△PAC∽△PDB

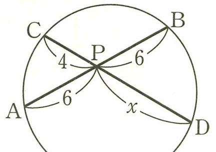
よって，PA：PD=PC：PB

ゆえに，PA·PB=PC·PD

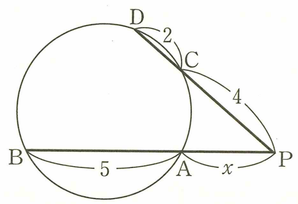


32　次の図において，xの値を求めよ．ただし，点Oは円の中心である．

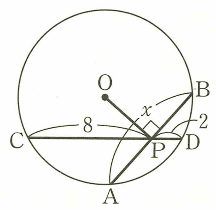
(1)



(2)



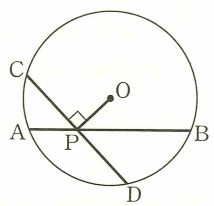
(3)



33　右の図のように，円Oの内部の点Pを通る任意の弦をAB，点Pを通りOPに垂直な弦をCDとするとき，

$PA \cdot PB = OC^2 - OP^2$

であることを証明せよ．

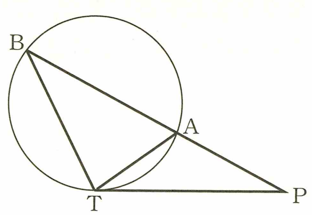


例題 10　方べきの定理②

円の外部の点Pからこの円に引いた接線の接点をTとする．Pを通り，この円と２点A，Bで交わる直線を引くと，

$\mathbf{PA \cdot PB = PT^2}$

であることを証明せよ．



解　△PTAと△PBTにおいて，

∠TPA=∠BPT，∠PTA=∠PBT

であるから，△PTA∽△PBT

よって，PA：PT=PT：PB

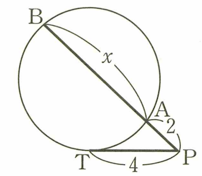
ゆえに，$PA \cdot PB = PT^2$

●ポイント

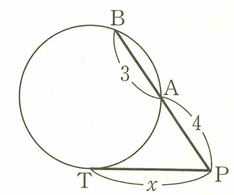
①　円Oの周上にない点Pを通る直線が，円Oと２点A，Bで交わるとき，PA·PBの値は，直線の引き方に関係なく一定の値を示す．この一定の値を点Pの円Oに関する**方べき**という．

34　下の図において，xの値を求めよ．ただし，直線PTは円の接線とする．

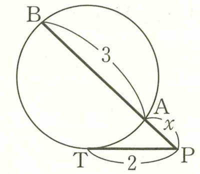
(1)



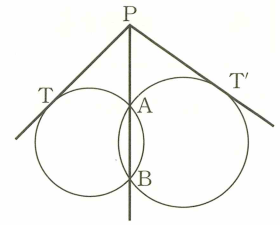
(2)



(3)

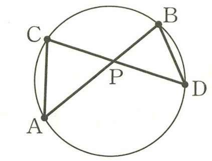


35　交わる２つの円に，共通な弦ABの延長上の点Pから，それぞれ接線PT，PT′を引く．このとき，PT=PT′であることを証明せよ．



例題 11　方べきの定理の逆

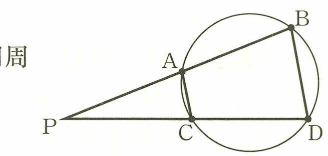
２つの線分AB，CD，またはそれらの延長の交点をPとするとき，PA·PB=PC·PDならば，４点A，B，C，Dは同一円周上にあることを証明せよ．



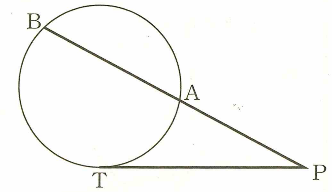
解　PA·PB=PC·PDより，PA：PD=PC：PB

また，∠APC=∠DPBであるから，△APC∽△DPB

よって，∠PAC=∠PDBより，４点A，B，C，Dは同一円周上にある．

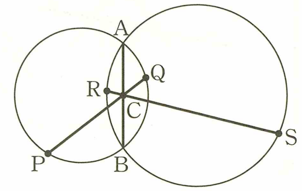


36　一直線上にない３点A，B，Tがあり，線分BAの延長上の点Pから直線PTを引くとき，$PT^2 = PA \cdot PB$ならば，PTは，３点A，B，Tを通る円の接線であることを証明せよ．



37　２点A，Bで交わる２円がある．線分AB上に点Cをとり，点Cで交わる２円の弦を，それぞれPQ，RSとする．

このとき，４点P，Q，R，Sは同一円周上にあることを証明せよ．



38　直径６の円Oと，OP=5となる点Pがある．円Oの周上にPC=4となる点Cをとるとき，PCは円Oの接線であることを証明せよ．

●ポイント

①　４点が同一円周上にあることを示すには，p.69，71のポイントや方べきの定理の逆を用いる．

例題 12　２つの円の位置関係

半径がそれぞれ r，$r'(r>r')$ の２つの円O，O′について，位置関係と，中心間の距離を d としたときの r，r'，d の関係式を表にまとめると次のようになる．(1)～(3)にあてはまる語句または，式を書き入れよ．

位置関係	離れている	外接する	２点で交わる	(1)	一方が他方の内部にある
r，r'，d の関係式	$d>r+r'$	(2)	$r-r'<d<r+r'$	$d=r-r'$	(3)

解　(1)　**内接する**　(2)　$\boldsymbol{d=r+r'}$　(3)　$\boldsymbol{d<r-r'}$

39　半径がそれぞれ５，３の２円において，中心間の距離 d が次のようなとき，２円はどのような位置関係にあるか．

(1)　$d=1$　(2)　$d=2$　(3)　$d=3$　(4)　$d=8$　(5)　$d=9$

40　２円の半径が等しいとき，２円の位置関係にはどのようなものがあるか．

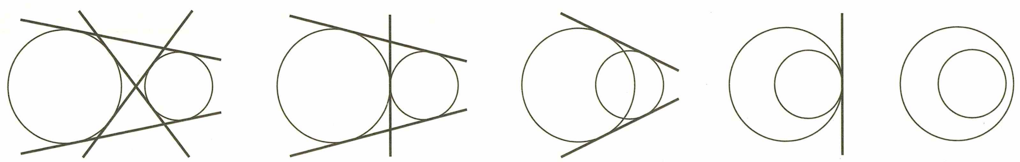
41　半径がともに５である２つの円が２点A，Bで交わっている．弦ABの長さが６であるとき，２つの円の中心間の距離を求めよ．

例題 13　共通接線

半径がそれぞれ r，$r'(r>r')$ の２つの円O，O′について，位置関係と共通接線の数を表にまとめると次のようになる．(1)～(5)にあてはまる数を書き入れよ．

位置関係	離れている	外接する	２点で交わる	内接する	一方が他方の内部にある
共通接線の数	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

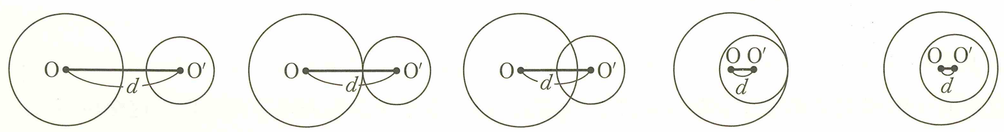
解　(1)　**4**　(2)　**3**　(3)　**2**　(4)　**1**　(5)　**0**



●ポイント

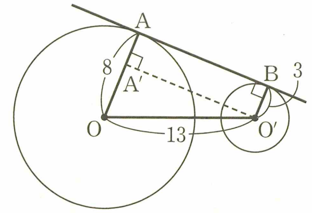
①　半径がそれぞれ r，$r'(r>r')$ の２つの円O，O′の位置関係は，次のように分けられる．

(1)　離れている　$d>r+r'$
(2)　外接する　$d=r+r'$
(3)　２点で交わる　$r-r'<d<r+r'$
(4)　内接する　$d=r-r'$
(5)　一方が他方の内部にある　$d<r-r'$

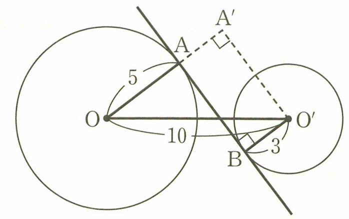


42　下の図で，直線ABは円O，O′の共通接線で，A，Bはその接点である．このとき，点O′から直線OAに垂線O′A′を引き，△OO′A′を考えることにより，線分ABの長さを求めよ．

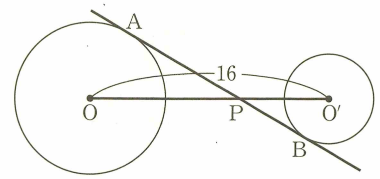
(1)



(2)

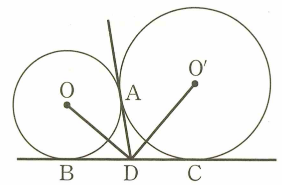


43　右の図のような，半径が５，３の２つの円O，O′がある．ABは円O，O′の共通接線で，A，Bはその接点である．また，点PはABとOO′との交点である．OO′＝16のとき，AP，BPの長さをそれぞれ求めよ．



44　右の図のように，点Aで外接する２つの円O，O′に共通接線を引き，接点をそれぞれB，Cとする．また，Aを通る共通接線とBCとの交点をDとする．このとき，次の問いに答えよ．

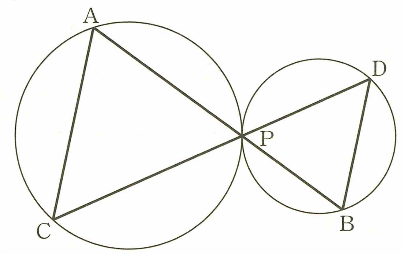
(1)　BD＝CDであることを証明せよ．
(2)　∠ODO′の大きさを求めよ．
(3)　∠BACの大きさを求めよ．
(4)　円O，O′の半径がそれぞれ６，10のとき，点Aと直線BCとの距離を求めよ．



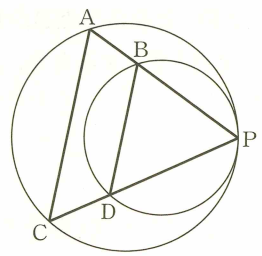
45　次の図のように，点Pで２つの円が接しているとき，Pを通る２本の直線とそれぞれの円との交点をA，BおよびC，Dとする．

それぞれの場合で，AC//BD であることを証明せよ．

(1)



(2)



●ポイント

①　共通接線の長さは，補助線を引いて直角三角形を作ることにより求める．

②　**45**　２つの円の接点を通る共通接線を引き，それぞれの円において接弦定理を用いる．