

1. すべての実数 x に対して、不等式 $x^2 + kx + k + 3 > 0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。【5点】

2. すべての実数 x に対して、不等式 $ax^2 - 2ax - a + 1 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。【5点】

3. 次の2次方程式 $x^2 - 2ax - 2a + 8 = 0$ について、次の各場合における定数 a の値の範囲を求めよ。【各5点】
 - (1) 正の解と負の解を1つずつもつ
 - (2) 異なる2つの正の解をもつ

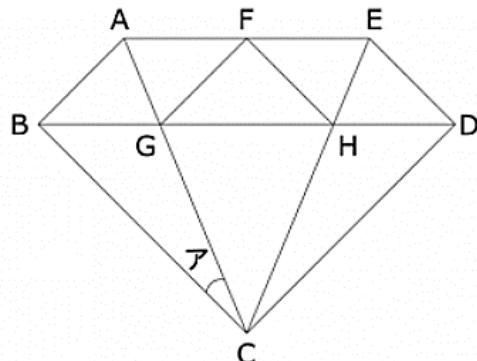
<Challenge!!>

2次不等式 $x^2 - (a+3)x + 3a < 0$ を満たす整数 x がちょうど2個だけあるように、定数 a の値の範囲を定めよ。

問題 (お茶の水女子大学附属中学 受験問題 2020年 算数)

難易度★★

<楽しい角度問題>



上の図で、直線AEと直線BDは平行です。
三角形BCDと三角形FGHは直角二等辺三角形です。四角形ABGFと四角形FHDEはひし形です。点Gは直線ACの上に、点Hは直線ECの上にあります。このとき、アの角度は何度ですか。

次の文のカタカナを漢字に直せ。(送り仮名もかく)

類題

1. すべての実数 x に対して、不等式 $x^2 - 2ax - a > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

2. すべての実数 x に対して、不等式 $kx^2 + (3k - 2)x - 2k + 6 > 0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

3. 放物線 $y = x^2 + 2mx + 2m + 3$ と x 軸が次の範囲において異なる2点で交わるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。
 - (1) $x > 0$
 - (2) $x < 0$
 - (3) $x \leq 2$
 - (4) 1点は $x < 1$, 他の1点は $x > 1$

※配点
①～⑫ 各 0.5 点

⑪ ソウギョウに床を出て家事をする

⑨ ハキに満ちている

⑦ 漢文学の勉強会をシュサイしている

⑤ 工事のシンチヨク状況を尋ねた

③ 人知れずソウトを抱く

① 感染症拡大防止のためのボウエキ体制

得点

⑫ 頭痛とオカンがしてきた

⑩ 女王にエッケンを申し述べた

⑧ 参詣してごりやくにあづかった

⑥ ジュンボクの気風が残る

④ 鮑くことなくキョウウラクにふけった

② コウズカの珍重する品

高校数学 チェックテスト 解答 9/20

1. すべての実数で成り立つ不等式【5点】

$$-2 < k < 6$$

2. すべての実数で成り立つ不等式【5点】

$$0 < a \leq \frac{1}{2}$$

左辺を因数分解すると

$$(x-a)(x-3) < 0 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

[1] $a < 3$ のとき, ①の解は $a < x < 3$

3. 2次方程式の解の正負【各5点】

$$(1) a > 4$$

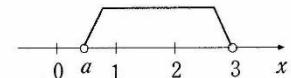
$$(2) 2 < a < 4$$

これを満たす整数 x

がちょうど2個ある
とき, その整数 x は

1, 2 となる。

よって $0 \leq a < 1$



[2] $a=3$ のとき, ①は $(x-3)^2 < 0$ となるから,

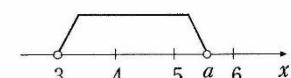
解はない。よって, 条件を満たさない。

[3] $a > 3$ のとき, ①の解は $3 < x < a$

これを満たす整数 x

がちょうど2個ある
とき, その整数 x は
4, 5 となる。

よって $5 < a \leq 6$



<Challenge!> (+5点)

$$0 \leq a < 1, \quad 5 < a \leq 6$$

<角度問題> (+5点)

$$22.5^\circ$$

類題

1. すべての実数で成り立つ不等式

$$-1 < a < 0$$

2. すべての実数で成り立つ不等式

$$\frac{2}{17} < k < 2$$

3. 2次方程式の解の正負

$$-1 < a < 0$$

$$(1) -\frac{3}{2} < m < -1 \quad (2) m > 3$$

$$(3) -\frac{7}{6} \leq m < -1, \quad m < 3$$

$$(4) m < -1$$

| | | | | | |
|-----------------------------|-----------------|---|------------------|-------------------|---------------------|
| ⑪ ソウギョウに床を出て家事をする | ⑨ ハキに満ちている | ⑦ 漢文学の勉強会をシユサイしている | ⑤ 工事のシンチヨク状況を尋ねた | ③ 人知れずソウトを抱く | ① 感染症拡大防止のためのポウエキ体制 |
| ⑫ 頭痛とオカシがしてきた | ⑩ 女王にエツケンを申してゐる | ⑧ 参詣してごリヤクにあづかった | ⑥ ジュンボクの気風が残る | ④ 飽くことなくヨウラクにふけった | ② コウズカの珍重する品 |
| 悪寒 | 謁見 | 利益 | 純朴 | 享楽 | 好事家 |
| (1) $-\frac{3}{2} < m < -1$ | (2) $m > 3$ | (3) $-\frac{7}{6} \leq m < -1, \quad m < 3$ | (4) $m < -1$ | | |

<楽しい角度問題>

$$1. x^2 + kx + k + 3 > 0$$

すべての実数 x について不等式が成り立つには $D < 0$ とすれば良い。

$$D = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 3) < 0$$

$$k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$(k+2)(k-6) < 0$$

$$\underline{-2 < k < 6}$$

2. すべての実数 x で, $ax^2 - 2ax - a + 1 > 0$ が成り立つためには, $y = ax^2 - 2ax - a + 1 \cdots ①$ のグラフが、 x 軸より常に上側にあればよい。

(i) $a=0$ のとき, ①は $y=1$

となり、条件を満たす。

よって、 $a=0$ のときは成り立つ。

(ii) $a \neq 0$ のとき、①は2次関数となるから次の条件を満たせばよい。

$$\begin{cases} a > 0 \\ \frac{D}{4} = (-a)^2 - a(-a+1) < 0 \end{cases} \cdots ②$$

$$\text{③より } 2a^2 - a < 0$$

$$a(2a-1) < 0 \text{ ゆえに } 0 < a < \frac{1}{2} \cdots ③'$$

$$\text{②, ③' より } 0 < a < \frac{1}{2}$$

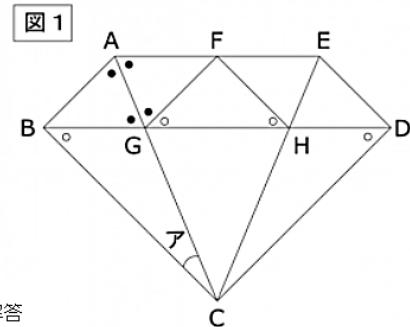
$$\text{よって, (i), (ii)より } 0 \leq a < \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

(ii)の別解 $a \neq 0$ のとき、①は2次関数となる。

$$\begin{aligned} y &= a(x^2 - 2x) - a + 1 \\ &= a(x-1)^2 - 2a + 1 \end{aligned}$$

(最小値) > 0 となればよいので

$$\begin{cases} a > 0 \\ -2a + 1 > 0 \end{cases} \text{ よって, } 0 < a < \frac{1}{2} \quad \text{答}$$



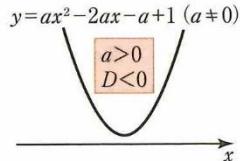
解答

上の図1に、45度を○で示しました。
四角形ABGFがひし形なので、対角線AGによって同じ角度●が4個現れます。また、ABとFGが平行なので、

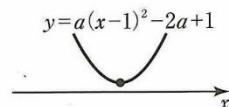
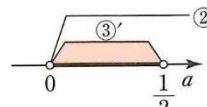
角ABG=角FGH=45度
となり、角ABCは直角とわかります。

●=(180-45)÷2=67.5度なので、
角度ア=180-(角ABC+角BAG)=22.5度
と求められます。

◀問題文において、“不等式”としかかいてないので、 $a \neq 0$ とは限らない（2次不等式とは限らない）ので場合分けが必要です。



グラフが「下に凸」で、かつ「 x 軸と共有点をもたない」ことが条件です。



◀最小値をもつには下に凸でなければならぬので
(x^2 の係数) > 0 が必要です。

3.

解 $f(x) = x^2 - 2ax - 2a + 8$ とおくと

$$f(x) = (x-a)^2 - a^2 - 2a + 8$$

(1) $y=f(x)$ のグラフが右図のようになればよい。

$x=0$ のとき y の値が負であればよいので

$$f(0) = -2a + 8 < 0 \quad \text{よって} \quad a > 4 \quad \text{答}$$

(2) $y=f(x)$ のグラフが右図のようになればよい。

(i) x 軸と異なる 2 点で交わるから

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (-2a + 8) = (a+4)(a-2) > 0$$

$$\text{ゆえに } a < -4, \quad 2 < a \quad \dots \dots \text{①}$$

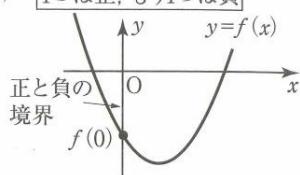
(ii) 軸 $x=a$ が x 軸の右側にあるから $a > 0 \quad \dots \dots \text{②}$

(iii) $x=0$ のとき, y の値が正だから,

$$f(0) = -2a + 8 > 0 \quad \text{より} \quad a < 4 \quad \dots \dots \text{③}$$

よって, ①, ②, ③の共通範囲を求めて, $2 < a < 4 \quad \text{答}$

(1) [1つは正, もう1つは負]



(2) [2つとも正]

