

1. すべての実数  $x$  に対して、不等式  $x^2 + kx + k + 3 > 0$  が成り立つような定数  $k$  の値の範囲を求めよ。【5点】

2. すべての実数  $x$  に対して、不等式  $ax^2 - 2ax - a + 1 > 0$  が成り立つような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。【5点】

3. 次の2次方程式  $x^2 - 2ax - 2a + 8 = 0$  について、次の各場合における定数  $a$  の値の範囲を求めよ。【各5点】

(1) 正の解と負の解を1つずつもつ

(2) 異なる2つの正の解をもつ

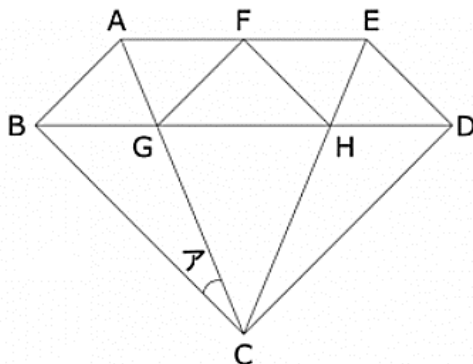
<Challenge!!>

2次不等式  $x^2 - (a+3)x + 3a < 0$  を満たす整数  $x$  がちょうど2個だけあるように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

<楽しい角度問題>

問題 (お茶の水女子大学附属中学 受験問題 2020年 算数)

難易度★★



上の図で、直線AEと直線BDは平行です。  
 三角形BCDと三角形FGHは直角二等辺三角形です。四角形ABGFと四角形FHDEはひし形です。点Gは直線ACの上に、点Hは直線ECの上にあります。このとき、アの角度は何度ですか。

類 題

1. すべての実数  $x$  に対して、不等式  $x^2 - 2ax - a > 0$  が成り立つような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。
2. すべての実数  $x$  に対して、不等式  $kx^2 + (3k - 2)x - 2k + 6 > 0$  が成り立つような定数  $k$  の値の範囲を求めよ。
3. 放物線  $y = x^2 + 2mx + 2m + 3$  と  $x$  軸が次の範囲において異なる 2 点で交わるとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。
- (1)  $x > 0$                       (2)  $x < 0$                       (3)  $x \leq 2$
- (4) 1 点は  $x < 1$ , 他の 1 点は  $x > 1$

※配点 ①～⑫ 各 0.5 点	⑪ ソウギョウに床を出て家事をする	⑨ ハキに満ちている	⑦ 漢文学の勉強会をシュサイしている	⑤ 工事のシンチヨク状況を尋ねた	③ 人知れずソウトを抱く	① 感染症拡大防止のためのボウエキ体制
	⑫ 頭痛とオカンがしてきた	⑩ 女王にエッケンを申しでる	⑧ 参詣してゴリヤクにあずかった	⑥ ジュンボクの氣風が残る	④ 飽くことなくキョウラクにふけた	② コウズカの珍重する品
得点						

漢検 2 級 漢字テスト 33 氏名

次の文のカタカナを漢字に直せ。(送り仮名もかく)

9/29

# 高校数学      チェックテスト      解答      9/20

## 1. すべての実数で成り立つ不等式【5点】

$$-2 < k < 6$$

## 2. すべての実数で成り立つ不等式【5点】

$$0 < a \leq \frac{1}{2}$$

## 3. 2次方程式の解の正負 【各5点】

$$(1) a > 4 \qquad (2) 2 < a < 4$$

## <Challenge!> (+5点)

$$0 \leq a < 1, \quad 5 < a \leq 6$$

## <角度問題> (+5点)

$$22.5^\circ$$

## 類 題

## 1. すべての実数で成り立つ不等式

$$-1 < a < 0$$

## 2. すべての実数で成り立つ不等式

$$\frac{2}{17} < k < 2$$

## 3. 2次方程式の解の正負

$$-1 < a < 0$$

$$(1) -\frac{3}{2} < m < -1 \qquad (2) m > 3$$

$$(3) -\frac{7}{6} \leq m < -1, \quad m < 3$$

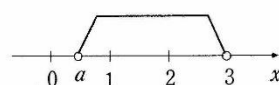
$$(4) m < -1$$

左辺を因数分解すると

$$(x-a)(x-3) < 0 \quad \dots\dots ①$$

$$[1] \quad a < 3 \text{ のとき, } ① \text{ の解は } a < x < 3$$

これを満たす整数  $x$   
がちょうど2個ある  
とき, その整数  $x$  は  
1, 2 となる。



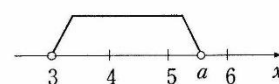
よって  $0 \leq a < 1$

$$[2] \quad a = 3 \text{ のとき, } ① \text{ は } (x-3)^2 < 0 \text{ となるから,}$$

解はない。よって, 条件を満たさない。

$$[3] \quad a > 3 \text{ のとき, } ① \text{ の解は } 3 < x < a$$

これを満たす整数  $x$   
がちょうど2個ある  
とき, その整数  $x$  は  
4, 5 となる。



よって  $5 < a \leq 6$

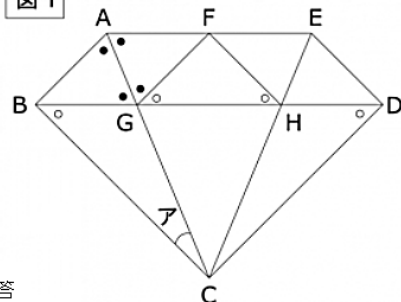
以上から, 求める  $a$  の値の範囲は

$$0 \leq a < 1, \quad 5 < a \leq 6$$

⑪ ソウギョウに床を出て家手をする	⑨ ハキに満ちている	⑦ 漢文字の勉強会をシュサイしている	⑤ 工事のシンチヨク状況を尋ねた	③ 人知れずソウウトを抱く	① 感染症拡大防止のためのボウエキ体制
早暁	覇気	主宰	進捗	壮図	防疫
⑫ 頭痛とオカカンがしてきた	⑩ 女王にエツケンを申しでる	⑧ 参詣してゴリヤクにあずかった	⑥ ジュンボクの気風が残る	④ 飽くことなくキョウラクにふけた	② コウズカの珍重する品
悪寒	謁見	利益	純朴	享楽	好事家

<楽しい角度問題>

図1



解答

上の図1に、45度を○で示しました。  
 四角形ABGFがひし形なので、対角線AGによって  
 同じ角度●が4個現れます。また、ABとFGが平行  
 なので、  
 角ABG=角FGH=45度  
 となり、角ABCは直角とわかります。

● =  $(180 - 45) \div 2 = 67.5$ 度なので、  
 角度ア =  $180 - (\text{角ABC} + \text{角BAG}) = 22.5$ 度  
 と求められます。

$$1. x^2 + kx + k + 3 > 0$$

すべての実数xについて不等式が  
 成り立つには  $D < 0$  とすれば良い

$$D = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 3) < 0$$

$$k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$(k + 2)(k - 6) < 0$$

$$\underline{-2 < k < 6}$$

2. すべての実数  $x$  で、 $ax^2 - 2ax - a + 1 > 0$  が成  
 り立つためには、 $y = ax^2 - 2ax - a + 1 \dots \textcircled{1}$  のグラ  
 フが、 $x$  軸より常に上側にあればよい。

(i)  $a = 0$  のとき、 $\textcircled{1}$  は  $y = 1$

となり、条件を満たす。

よって、 $a = 0$  のときは成り立つ。

(ii)  $a \neq 0$  のとき、 $\textcircled{1}$  は2次関数となるから次の  
 条件を満たせばよい。

$$\begin{cases} a > 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (-a)^2 - a(-a + 1) < 0 \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{ より } 2a^2 - a < 0$$

$$a(2a - 1) < 0 \text{ ゆえに } 0 < a < \frac{1}{2} \dots \textcircled{3}'$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3}' \text{ より } 0 < a < \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, (i), (ii) より } 0 \leq a < \frac{1}{2} \text{ 答}$$

(ii)の別解  $a \neq 0$  のとき、 $\textcircled{1}$  は2次関数となる。

$$y = a(x^2 - 2x) - a + 1$$

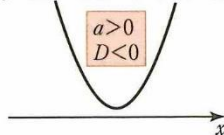
$$= a(x - 1)^2 - 2a + 1$$

(最小値)  $> 0$  となればよいので

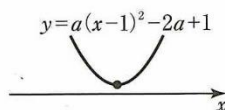
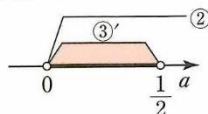
$$\begin{cases} a > 0 \\ -2a + 1 > 0 \end{cases} \text{ よって, } 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 答}$$

問題文において、“不等式”とし  
 かかいてないので、 $a \neq 0$  とは  
 限らない(2次不等式とは限ら  
 ない)ので場合分けが必要です。

$$y = ax^2 - 2ax - a + 1 \quad (a \neq 0)$$



グラフが「下に凸」で、かつ  
 「 $x$  軸と共有点をもたない」こと  
 が条件です。



最小値をもつには下に凸でなけ  
 ればならないので  
 ( $x^2$  の係数)  $> 0$  が必要です。

3.

解

 $f(x) = x^2 - 2ax - 2a + 8$  とおくと

$$f(x) = (x-a)^2 - a^2 - 2a + 8$$

(1)  $y = f(x)$  のグラフが右図のようになればよい。

$x=0$  のとき  $y$  の値が負であればよいので

$$f(0) = -2a + 8 < 0 \quad \text{よって} \quad a > 4 \quad \text{答}$$

(2)  $y = f(x)$  のグラフが右図のようになればよい。

(i)  $x$  軸と異なる 2 点で交わるから

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (-2a + 8) = (a+4)(a-2) > 0$$

$$\text{ゆえに} \quad a < -4, \quad 2 < a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

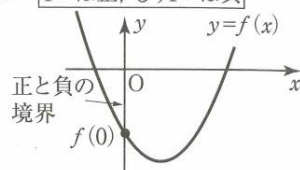
(ii) 軸  $x=a$  が  $x$  軸の右側にあるから  $a > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

(iii)  $x=0$  のとき,  $y$  の値が正だから,

$$f(0) = -2a + 8 > 0 \quad \text{より} \quad a < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

よって, ①, ②, ③の共通範囲を求めて,  $2 < a < 4$  答

(1) 1つは正, もう1つは負



(2) 2つとも正

