第1章 数と式

1 式の計算

例題 1　単項式の次数と係数

単項式 $3a^4x^3y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 何次式か．　(2) a について何次式か．

(3) x について何次式で，係数は何か．　(4) x，y について何次式で，係数は何か．

解 (1) a について４次，x について３次，y について２次より，合計して，**９次式**

(2) **４次式**

(3) x について３次式で，x^3 以外の数と文字が係数より，係数は，$\boldsymbol{3a^4y^2}$

(4) x，y について５次式で，係数は，$\boldsymbol{3a^4}$

1 次の単項式で，［ ］内の文字に着目すると何次式か．また，そのときの係数は何か．

(1) $-3ax^2y^2$　［a］，［y］　(2) $-p^4q^3r^2$　［p］，［q］

(3) $-\dfrac{3}{4}abx^2y^3$　［x］，［y］，［a，b］，［x，y］

2 次の整式の同類項をまとめて，何次式かをいえ．

(1) $4x^2-7x+5-6x^2-3x-5$

(2) $-2xy+3y^2-x^3+2y^2+4x^3+5xy$

例題 2　降べきの順

次の整式の［ ］内の文字について，何次式かを述べ，降べきの順に整理せよ．

$ax^2+a^2x-2x^2+a^3+4a^2x^2+a+2$　［x］，［a］

解 x については，最高次の項が２次より，**２次式**

x について降べきの順に整理すると，$\boldsymbol{(4a^2+a-2)x^2+a^2x+a^3+a+2}$

a については，最高次の項が３次より，**３次式**

a について降べきの順に整理すると，$\boldsymbol{a^3+(4x^2+x)a^2+(x^2+1)a-2x^2+2}$

3 次の問いに答えよ．

(1) $-3x^2+12x-4+7x^2-8x+9$ を x について降べきの順に整理せよ．

(2) $2x^2+2y^2-3xy+4y^2+5xy-x^2$ を y について降べきの順に整理せよ．

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ を a について降べきの順に整理せよ．

●ポイント

① 単項式と多項式を合わせて**整式**という．

② 整式を１つの文字について降べきの順に整理しておくと，因数分解のとき役に立つ．

③ 例題２のように，係数が多項式になるとき，係数も降べきの順に整理しておく．

例題 3　整式の加法・減法

$5x^2-2xy+3y^2$ と $4x^2-6xy-y^2$ の和を求めよ．また，第1式から第2式を引け．

解　$(5x^2-2xy+3y^2)+(4x^2-6xy-y^2)=\boldsymbol{9x^2-8xy+2y^2}$

$(5x^2-2xy+3y^2)-(4x^2-6xy-y^2)=\boldsymbol{x^2+4xy+4y^2}$

4　次の式の和を求めよ．また，第1式から第2式を引け．

(1)　$-3x^2-2x-1$，$2x^2-7x+5$　　(2)　x^2-3+2x，$2x^2-x+1$

(3)　$2x^2+3xy-5y^2$，$-x^2+2xy+y^2$　　(4)　$x^2-5xy+2y^2$，$-3x^2+2xy+3y^2$

5　次の式の和を求めよ．また，第1式から第2式を引け．

(1)　x^3-2x^2+3x-8，$2x^3+3x^2-x+5$

(2)　$2x^3+3x^2y-2xy^2-5y^3$，$-3x^3+2x^2y+8xy^2+3y^3$

例題 4　整式の乗法

次の問いに答えよ．

(1)　$(-2ab^2)^2\times(-3a^2b)^3$ を計算せよ．

(2)　$(x^3-3x^2+2x-1)(x^2-3)$ を展開せよ．

解　(1)　与式$=4a^2b^4\times(-27a^6b^3)=\boldsymbol{-108a^8b^7}$

(2)　与式$=x^3(x^2-3)-3x^2(x^2-3)+2x(x^2-3)-(x^2-3)$

$=x^5-3x^3-3x^4+9x^2+2x^3-6x-x^2+3$

$=\boldsymbol{x^5-3x^4-x^3+8x^2-6x+3}$

6　次の式を計算せよ．

(1)　$(-2xy^2z)^2\times3x^4y$　　(2)　$\{(-p^2q)^2\}^4\times(pq^3)^2$

(3)　$(-ab^2)^3\times(3a^2b^3)^2$　　(4)　$\{(-2ab)^2\}^3\times(3ab)^2$

7　次の式を展開せよ．

(1)　$12a^2b\left(\dfrac{a^2}{6}-\dfrac{ab}{4}+\dfrac{b^2}{3}\right)$　　(2)　$(3x-x^2)(5x^2-2x+1)$

(3)　$(x^2-2xy-3)(2x+3y)$　　(4)　$(a^2-ab+2b^2)(3a+b)$

8　次の式を展開し，a について降べきの順に整理せよ．

(1)　$(a+b+c)(a+b+2c)$

(2)　$(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$

●ポイント

①　加法・減法は，同類項の係数どうしを足したり引いたりする．

②　単項式と多項式の乗法は，分配法則を使って，単項式を多項式の各項に掛ける．

$A(B+C)=AB+AC$

例題 5　展開の公式

次の式を，公式を用いて展開せよ．

(1)　$(2a-3b)^2$　　(2)　$(xy+2z)(xy-2z)$

(3)　$(x+3y)(x-6y)$　　(4)　$(2x-1)(3x+2)$

解　(1)　与式$=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2=\boldsymbol{4a^2-12ab+9b^2}$

(2)　与式$=(xy)^2-(2z)^2=\boldsymbol{x^2y^2-4z^2}$

(3)　与式$=x^2+(3y-6y)x+3y\cdot(-6y)=\boldsymbol{x^2-3xy-18y^2}$

(4)　与式$=2\cdot 3x^2+\{2\cdot 2+(-1)\cdot 3\}x+(-1)\cdot 2=\boldsymbol{6x^2+x-2}$

9　次の式を，ポイント①を用いて展開せよ．

(1)　$(p+5q)^2$　　(2)　$(3a-4)^2$　　(3)　$(-x^2-x)^2$

(4)　$(2a-5b)(2a+5b)$　　(5)　$(a^2+b^2)(a^2-b^2)$　　(6)　$(-pq+r)(-pq-r)$

(7)　$(-2x^2+3z)(2x^2+3z)$　　(8)　$(x+5)(x-8)$　　(9)　$(a-b)(a+6b)$

(10)　$(2x+3y)(2x+y)$　　(11)　$(pq+3)(pq-4)$　　(12)　$(a^2-3)(a^2+7)$

(13)　$(3x-2y)(2x+3y)$　　(14)　$(2a+5)(7a-3)$　　(15)　$(-3xy+2)(5xy-8)$

例題 6　いろいろな式の展開

次の式を展開せよ．

(1)　$(x^2-x+1)(x^2+x-1)$　　(2)　$(x+y-3)(x+y+5)$

(3)　$(x-1)(x+1)(x^2+1)$　　(4)　$(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)$

解　(1)　与式$=\{x^2-(x-1)\}\{x^2+(x-1)\}$

$=(x^2)^2-(x-1)^2=\boldsymbol{x^4-x^2+2x-1}$

(2)　与式$=\{(x+y)-3\}\{(x+y)+5\}$

$=(x+y)^2+2(x+y)-15$

$=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2+2x+2y-15}$

(3)　与式$=\{(x-1)(x+1)\}(x^2+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)=\boldsymbol{x^4-1}$

(4)　与式$=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)$

$=\{(x^2+x)-2\}\{(x^2+x)-12\}$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$

$=x^4+2x^3+x^2-14x^2-14x+24$

$=\boldsymbol{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}$

10　次の式を展開せよ．

(1)　$(x+y+z)(x+y-z)$　　(2)　$(2a-b+c)(2a+b+c)$　　(3)　$(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

(4)　$(xy-x+2)(xy+x-2)$　　(5)　$(x+y-4z)(x+y+z)$　　(6)　$(2x-y-1)(2x-y-3)$

(7)　$(x+y+3)^2$　　(8)　$(a+2b-c)^2$　　(9)　$(x^2+x-2)^2$

(10)　$(x-3)(x+3)(x^2+9)$　　(11)　$(p-1)(p+1)(p+3)(p-3)$

(12)　$a(a-1)(a-2)(a-3)$　　(13)　$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$

●ポイント

①　**展開の公式(複号同順)**　(i)　$\boldsymbol{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}$　(ii)　$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

(iii)　$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$　(iv)　$\boldsymbol{(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd}$

②　公式をくり返し利用することを考える．複雑な式の展開では，何を１つのものとみるかが重要．例えば，$a-b$，$-a+b$ は同じ因数であること等に着眼する．

③　前から順に計算するだけでなく，計算の順序を変えてみることも必要である．

例題 7　共通因数による因数分解

次の式を因数分解せよ．

(1) $2ax-4x^2$　　(2) a^3-3a^2

(3) $6a^2b+2ab^2-4ab$　　(4) $p(x-y)+q(y-x)$

解 (1) 与式$=\mathbf{2x(a-2x)}$

(2) 与式$=\mathbf{a^2(a-3)}$

(3) 与式$=2ab\cdot3a+2ab\cdot b-2ab\cdot2=\mathbf{2ab(3a+b-2)}$

(4) 与式$=p(x-y)-q(x-y)=\mathbf{(x-y)(p-q)}$

11 次の式を因数分解せよ．

(1) $3ab-6b^2$　　(2) $4xy^2-12x^2y$

(3) $abxy-abpq$　　(4) a^2+5a

(5) $2a^4-6a^2$　　(6) $x^2y^2-2x^2y+3xy$

(7) $5a^3b^2c-15a^2bc^2-20a^2b^2c^3$　　(8) $2a(a+b)+6b(a+b)$

(9) $a(x-y)+(y-x)$　　(10) $3a(x-y)+6b(x-y)+9c(y-x)$

例題 8　2次式の因数分解①

次の式を，公式を用いて因数分解せよ．

(1) x^2+6x+9　　(2) $4a^2-12ab+9b^2$

(3) a^2-9b^2　　(4) $(a-b)^2-c^2$

(5) $x^2-10x+21$　　(6) $a^2+3ab-18b^2$

解 (1) 与式$=x^2+2x\cdot3+3^2=\mathbf{(x+3)^2}$

(2) 与式$=(2a)^2-2\cdot2a\cdot3b+(3b)^2=\mathbf{(2a-3b)^2}$

(3) 与式$=a^2-(3b)^2=\mathbf{(a+3b)(a-3b)}$

(4) 与式$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}=\mathbf{(a-b+c)(a-b-c)}$

(5) 与式$=x^2+(-3-7)x+(-3)\cdot(-7)=\mathbf{(x-3)(x-7)}$

(6) 与式$=a^2+(6b-3b)a+6b\cdot(-3b)=\mathbf{(a+6b)(a-3b)}$

12 次の式を因数分解せよ．

(1) $a^2+10a+25$　　(2) $x^2-16x+64$

(3) $x^2-8xy+16y^2$　　(4) $a^2+14ab+49b^2$

(5) $9x^2+6x+1$　　(6) $64a^2-48ab+9b^2$

(7) $3p^3-12p^2+12p$　　(8) $4x^3y+4x^2y^2+xy^3$

●ポイント

因数分解の公式（複号同順）

① $ac+bc=(a+b)c$　　② $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$

③ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　④ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

13 次の式を因数分解せよ．

(1) x^2-4

(2) a^2-64

(3) $9x^2-16y^2$

(4) $4x^2y^2-z^2$

(5) $(x+y)^2-4z^2$

(6) $(a+b)^2-(c-d)^2$

(7) x^4-25x^2

(8) $2a^3-18ab^2$

14 次の式を因数分解せよ．

(1) a^2+6a-7

(2) $x^2-8x+12$

(3) $x^2+5x-14$

(4) $a^2-ab-30b^2$

(5) $x^2+3xy-40y^2$

(6) $m^2+9mn+18n^2$

(7) x^3-2x^2-8x

(8) $3x^4y+36x^3y^2+81x^2y^3$

15 次の式を因数分解せよ．

(1) $a^2+2a+1-x^2$

(2) $4a^2-4ab+b^2-9c^2$

(3) $9x^2-y^2+4y-4$

(4) $x^2+4x+4+2xy+4y$

例題 9　2次式の因数分解②

$6a^2-ab-12b^2$ を因数分解せよ．

解 a^2 の係数 6 と $-12b^2$ を分解し，たすき掛けの結果が $-b$ になるものを見つける．

右の結果より，

与式$=(2a-3b)(3a+4b)$

$$\begin{array}{ccl} 2 & \diagdown\!\!\!\diagup\ -3b & \longrightarrow\ -9b \\ 3 & \ \ \ 4b & \longrightarrow\ \ \ 8b \\ \hline & & \ \ \ -b \end{array}$$

16 次の式を因数分解せよ．

(1) $2x^2-13x+6$

(2) $12x^2-7xy-12y^2$

(3) $2x^2+3x+1$

(4) $5a^2+7ab+2b^2$

(5) $2a^2-5a-3$

(6) $8x^2-10xy+3y^2$

(7) $12a^2+7a-12$

(8) $4x^2-41xy+10y^2$

(9) $5a^2-3a-2$

(10) $3a^2+5ab+2b^2$

(11) $5m^2-17m+6$

(12) $8s^2-14st-15t^2$

●ポイント

たすき掛けによる因数分解

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

$$\begin{array}{ccl} a & \diagdown\!\!\!\diagup\ b & \longrightarrow\ bc \\ c & \ \ \ d & \longrightarrow\ ad \\ \hline & & ad+bc \end{array}$$

例題 10　いろいろな因数分解①

次の式を因数分解せよ．

(1)　$9-9y+3xy-x^2$

(2)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(3)　$(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)-8$

解　(1)　次数の低い文字 y（1 次）について整理すると，

与式$=(3x-9)y-x^2+9=3(x-3)y-(x^2-9)=3(x-3)y-(x-3)(x+3)$

$=\boldsymbol{(x-3)(3y-x-3)}$

(2)　a，b，c すべての文字について 2 次式なので，1 つの文字について降べきの順に整理する．例えば，a について整理すると，

与式$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}=\boldsymbol{(b-c)(a-b)(a-c)}$

(3)　$x^2+2x=X$ とおくと，

与式$=X^2-7X-8=(X+1)(X-8)=(x^2+2x+1)(x^2+2x-8)=\boldsymbol{(x+1)^2(x+4)(x-2)}$

17　次の式を因数分解せよ．

(1)　$xy-x-y+1$

(2)　$x^2y-y^2z-y^3+x^2z$

(3)　$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(4)　$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

18　次の式を因数分解せよ．

(1)　$(a+b)^2+10(a+b)+25$

(2)　$5(x+y)^2-8(x+y)-4$

(3)　$(x^2+4x)^2-8(x^2+4x)-48$

(4)　$3(x^2-3x)^2-10(x^2-3x)-8$

例題 11　いろいろな因数分解②

$x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$ を因数分解せよ．

解　x について降べきの順に整理すると，

与式$=x^2+(4y+1)x+3y^2+5y-2=x^2+(4y+1)x+(y+2)(3y-1)$

$=\boldsymbol{(x+y+2)(x+3y-1)}$

$3y^2+5y-2$ のたすき掛け

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

x の 2 次式とみたときのたすき掛け

$$\begin{array}{cccc} 1 & y+2 & \longrightarrow & y+2 \\ 1 & 3y-1 & \longrightarrow & 3y-1 \\ \hline & & & 4y+1 \end{array}$$

19　次の式を因数分解せよ．

(1)　$x^2-xy-12y^2+5x+y+6$

(2)　$x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$

(3)　$2x^2+5xy+3y^2+2x+4y-4$

(4)　$6x^2-5xy-6y^2+4x+7y-2$

●ポイント

複雑な式の因数分解の基本方針

①　文字の次数が異なるときは，次数の低い文字について整理し，共通因数を調べる．

②　文字の次数が等しいときは，1 つの文字について降べきの順に整理する．
そのまま因数がわかるときと，文字式のたすき掛けが必要となるときがある．

例題 12　いろいろな因数分解③

次の式を因数分解せよ．

(1)　x^4-5x^2+4　　(2)　x^4+4

解　(1)　与式$=(x^2)^2-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}$

(2)　与式$=x^4\underline{+4x^2}+4\underline{-4x^2}=(x^2+2)^2-(2x)^2=\boldsymbol{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

20　次の式を因数分解せよ．

(1)　x^4-81　　(2)　x^4-8x^2+16

(3)　x^4-10x^2+9　　(4)　x^4-29x^2+100

(5)　$3x^4-x^2-2$　　(6)　$4x^4-25x^2+36$

21　次の式を因数分解せよ．

(1)　x^4+64　　(2)　x^4+x^2+1

(3)　$4x^4+y^4$　　(4)　$a^4+a^2b^2+25b^4$

(5)　a^4-3a^2+9　　(6)　$a^4-12a^2b^2+144b^4$

例題 13　3次式の展開

次の式を，公式を用いて展開せよ．

(1)　$(x+2y)^3$　　(2)　$(3a-b)^3$

(3)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$　　(4)　$(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

解　(1)　与式$=x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3=\boldsymbol{x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3}$

(2)　与式$=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot b+3\cdot 3a\cdot b^2-b^3=\boldsymbol{27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3}$

(3)　与式$=(2a-b)\{(2a)^2+2a\cdot b+b^2\}=(2a)^3-b^3=\boldsymbol{8a^3-b^3}$

(4)　与式$=(x+3y)\{x^2-x\cdot 3y+(3y)^2\}=x^3+(3y)^3=\boldsymbol{x^3+27y^3}$

22　次の式を，ポイント②を用いて展開せよ．

(1)　$(a+1)^3$　　(2)　$(x-3y)^3$

(3)　$(3x-2)^3$　　(4)　$(5a+b)^3$

(5)　$(a-2)(a^2+2a+4)$　　(6)　$(p+4)(p^2-4p+16)$

(7)　$(xy+3)(x^2y^2-3xy+9)$　　(8)　$(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$

●ポイント

①　ax^4+bx^2+c（複2次）の形では，$x^2=X$ とおいて単純に因数分解できる場合と，2次の項を付け加えて，A^2-B^2 の形に導く場合がある．

②　**3次式の展開の公式**(複号同順)

(i)　$\boldsymbol{(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3}$　　(ii)　$\boldsymbol{(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3}$

〔注〕　3次式の展開について，詳細は数学Ⅱで学習する．

23 次の式を展開せよ．

(1)　$(a+2)^3(a-2)^3$

(2)　$(x-1)^2(x^2+x+1)^2$

(3)　$(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(4)　$(a+b)^2(a-b)^2(a^4+a^2b^2+b^4)^2$

(5)　$(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)$

(6)　$(x+1)(x-1)(x^6-4)(x^4+x^2+1)$

例題 14　3次式の因数分解

次の式を因数分解せよ．

(1)　x^3+8　　　(2)　$27x^3-y^3$

(3)　$x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$

解　(1)　与式$=x^3+2^3=\boldsymbol{(x+2)(x^2-2x+4)}$

(2)　与式$=(3x)^3-y^3=\boldsymbol{(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)}$

(3)　与式$=x^3+3\cdot x^2\cdot 3y+3\cdot x\cdot(3y)^2+(3y)^3=\boldsymbol{(x+3y)^3}$

24 次の式を因数分解せよ．

(1)　x^3+27　　　(2)　x^3-64

(3)　$8x^3+1$　　　(4)　$8a^3-27b^3$

(5)　x^3y^3-8　　　(6)　$8a^3b^3+125c^3$

(7)　$(x+1)^3+8$　　　(8)　$64ab^3-27a^4$

25 次の式を因数分解せよ．

(1)　$x^3-6x^2+12x-8$　　　(2)　$x^3+9x^2+27x+27$

(3)　$8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$　　　(4)　$27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

26 次の問いに答えよ．

(1)　$a^3+b^3=(a+b)^3-\boxed{}$ を満たす $\boxed{}$ を因数分解した形で答えよ．

(2)　(1)を用いて，$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ．

(3)　(2)を用いて，次の式を因数分解せよ．

(ア)　$x^3-y^3-8z^3-6xyz$　　　(イ)　$x^3+3xy+y^3-1$

●ポイント

3次式の因数分解の公式(複号同順)

①　$\boldsymbol{a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)}$　　②　$\boldsymbol{a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3}$

〔注〕　3次式の因数分解について，詳細は数学Ⅱで学習する．

混合問題

A

1　$A=2x+y+3z$，$B=-3x+2y-z$，$C=x-3y-2z$ であるとき，次の式を計算せよ．

(1)　$3A-2B+C$　　(2)　$5(A+B-C)-3(A+2B-C)$

2　次の式を展開せよ．

(1)　$(2x+7y)^2$　　(2)　$(4ab+3c)(4ab-3c)$

(3)　$a(a-4)(a+6)$　　(4)　$(2x-y+1)(2x+y-1)$

(5)　$(a^2+2a-3)(a^2+2a-8)$　　(6)　$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

(7)　$(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1)^2$　　(8)　$(x+1)(x+2)(x-3)(x-6)$

3　次の式を因数分解せよ．

(1)　a^3+10a^2+25a　　(2)　$10x^2-13xy-3y^2$

(3)　$81x^4-256y^4$　　(4)　x^4-13x^2+36

(5)　x^8-1　　(6)　$4x^2-y^2-4x+1$

(7)　x^3-x^2-x+1　　(8)　$2(x^2+x)^2-7(x^2+x)-30$

(9)　$a^2b-2ab^2+b^3+bc-ca$　　(10)　$x^2+3xy+2y^2+x+5y-12$

4　次の(1)～(3)の式を展開し，(4)～(6)の式を因数分解せよ．

(1)　$(3x-4)^3$　　(2)　$(x+y)^3(x^2-xy+y^2)^3$

(3)　$(x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$　　(4)　x^6-2x^3+1

(5)　$a^6-7a^3b^3-8b^6$　　(6)　$a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$

B

5　次の式を計算せよ．

(1)　$(x^3-x^2-x-3)(x^3+4x^2+4x-3)$

(2)　$(x-a)(x-b)(a-b)+(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)$

6　次の式を因数分解せよ．

(1)　$b^3+ab^2+2ab+2b^2+a+b$　　(2)　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

(3)　$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+16$　　(4)　$9a^4+8a^2+16$

(5)　$xyz+xy-2yz-zx-x-2y+2z+2$　　(6)　$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

(7)　$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

■ヒント

6　(2)　a について降べきの順に整理してから，たすき掛けを考える．

(7)　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ を利用する．

2　実　数

例題 1　有理数と循環小数

次の分数は小数に，小数は分数になおせ．

(1) $\dfrac{3}{8}$　　(2) $\dfrac{2}{7}$　　(3) $0.\dot{2}\dot{7}$　　(4) $0.3\dot{1}7\dot{8}$

解 (1) $\dfrac{3}{8}=\mathbf{0.375}$　　(2) $\dfrac{2}{7}=0.285714285714\cdots\cdots=\mathbf{0.\dot{2}8571\dot{4}}$

(3) $x=0.\dot{2}\dot{7}$ とおくと，

$$\begin{array}{rl} 100x= & 27.27\cdots\cdots \\ -)\quad x= & 0.27\cdots\cdots \\ \hline 99x= & 27 \end{array}$$

よって，$x=\mathbf{\dfrac{3}{11}}$

(4) $x=0.3\dot{1}7\dot{8}$ とおくと，

$$\begin{array}{rl} 10000x= & 3178.178\cdots\cdots \\ -)\quad 10x= & 3.178\cdots\cdots \\ \hline 9990x= & 3175 \end{array}$$

よって，$x=\mathbf{\dfrac{635}{1998}}$

1　次の数の中から，(1)自然数，(2)整数，(3)有理数，(4)無理数を選べ．

$-4,\quad 0,\quad \dfrac{25}{5},\quad \dfrac{9}{4},\quad -\dfrac{9}{16},\quad \sqrt{5},\quad -\sqrt{16},\quad (\sqrt{7})^2,\quad \dfrac{\pi}{2},\quad 1.\dot{2}\dot{3}$

2　次の分数は小数に，小数は分数になおせ．

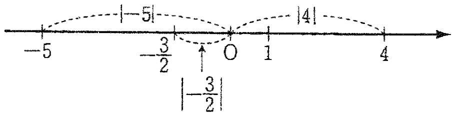
(1) $\dfrac{2}{9}$　　(2) $\dfrac{4}{11}$　　(3) $\dfrac{5}{37}$　　(4) $0.\dot{7}$　　(5) $0.\dot{4}2\dot{9}$　　(6) $0.3\dot{5}\dot{7}$

例題 2　絶対値

次の値を求めよ．

(1) $|4|$　　(2) $|-5|$　　(3) $\left|-\dfrac{3}{2}\right|$

解　絶対値は，数直線上で原点からの距離を表す．
正の数はその値がそのまま絶対値となり，
負の数は符号を変えた数が絶対値となる．



答 (1) 4　　(2) 5　　(3) $\dfrac{3}{2}$

3　次の値を求めよ．

(1) $|-8|$　　(2) $|3.4|$　　(3) $\left|-\dfrac{7}{5}\right|$　　(4) $|4-10|$

(5) $|-3|+|-4|$　　(6) $\left|\dfrac{5}{2}\right|-\left|-\dfrac{2}{3}\right|$　　(7) $|3-\sqrt{10}|$　　(8) $|\pi-4|$

4　次の場合について，$|x-2|$ の絶対値の記号をはずせ．

(1) $x<2$　　(2) $x\geqq 2$

5　次の場合について，$|a|+|a-3|$ を簡単にせよ．

(1) $a<0$　　(2) $0\leqq a<3$　　(3) $a\geqq 3$

●ポイント

① 有理数は整数，有限小数，循環小数のいずれか，無理数は循環しない無限小数で表される数である．有理数と無理数をまとめて**実数**という．

② 0の絶対値は0である．　③ $|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$ である．$|\quad|$の中が正か負かに注意する．

例題 3　絶対値の性質

次の問いに答えよ．

(1)　$|a| \geqq a$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　$|ab|=|a||b|$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$a \geqq 0$，$b<0$ とする．

解　(1)　$a \geqq 0$ のとき，$|a|=a$ より，等号が成り立つ．

$a<0$ のとき，$|a|=-a>0$　よって，$|a|=-a>a$ より，成り立つ．

(2)　$ab \leqq 0$ より，$|ab|=-ab$，$|a|=a$，$|b|=-b$ より，$|a||b|=-ab$

ゆえに，等式が成り立つ．

6　例題３の(2)の等式が，次の場合にも成り立つことを証明せよ．

(1)　$a \geqq 0$，$b \geqq 0$　　(2)　$a<0$，$b \geqq 0$　　(3)　$a<0$，$b<0$

7　次の式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$|a| \geqq -a$　　(2)　$|a|^2=a^2$

8　$b \neq 0$ のとき，$|ab|=|a||b|$ を利用して，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ を証明せよ．

例題 4　平方根

次の問いに答えよ．

(1)　25の平方根を求めよ．　　(2)　$\sqrt{28}$ を $a\sqrt{b}$ の形で表せ．

(3)　$\sqrt{a^2}$ の根号をはずせ．

解　(1)　正の数，負の数の２つがある．$\pm\sqrt{25}=\pm\mathbf{5}$

(2)　$\sqrt{28}=\sqrt{2^2\cdot 7}=\mathbf{2\sqrt{7}}$

(3)　$a \geqq 0$ のとき，$\sqrt{a^2}=\boldsymbol{a}$　　$a<0$ のとき，$\sqrt{a^2}=-\boldsymbol{a}$ ($\sqrt{a^2}=|a|$ と同じ)

9　次の数の平方根を求めよ．

(1)　49　　(2)　144　　(3)　$\dfrac{16}{9}$　　(4)　15　　(5)　33

10　$\sqrt{4^2}$，$\sqrt{(-5)^2}$，$(\sqrt{6})^2$ の値をそれぞれ求めよ．

11　次の数を $a\sqrt{b}$ の形で表せ．

(1)　$\sqrt{27}$　　(2)　$\sqrt{20}$　　(3)　$\sqrt{32}$　　(4)　$\sqrt{75}$　　(5)　$\sqrt{112}$

12　次の場合について，$\sqrt{(x-1)^2}$ の根号をはずせ．

(1)　$x<1$　　(2)　$x \geqq 1$

●ポイント

①　$\sqrt{a^2}=|a|$　　②　$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{\boldsymbol{a^2b}}=\boldsymbol{a\sqrt{b}}$

例題 5　根号を含む式の計算

次の式を計算せよ．

(1)　$\sqrt{45}-\sqrt{80}-\sqrt{5}$　　(2)　$(\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2$

解　(1)　与式 $=3\sqrt{5}-4\sqrt{5}-\sqrt{5}=(3-4-1)\sqrt{5}=\mathbf{-2\sqrt{5}}$

(2)　与式 $=(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2$ ⟵ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ を利用

$=5+4\sqrt{10}+8=\mathbf{13+4\sqrt{10}}$

13　次の式を計算せよ．

(1)　$\sqrt{27}+\sqrt{12}$　　(2)　$\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{72}$

(3)　$2\sqrt{32}-\sqrt{18}+3\sqrt{8}$　　(4)　$3\sqrt{3}+2\sqrt{\dfrac{27}{4}}-\sqrt{48}$

(5)　$(2\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$　　(6)　$(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+2\sqrt{3})$

(7)　$(2\sqrt{5}-\sqrt{6})(2\sqrt{5}+\sqrt{6})$　　(8)　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

(9)　$(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$　　(10)　$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$

例題 6　分母の有理化

次の式の分母を有理化せよ．

(1)　$\dfrac{3}{\sqrt{6}}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

解　(1)　$\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}=\mathbf{4+\sqrt{15}}$

14　次の式の分母を有理化せよ．

(1)　$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　　(2)　$\dfrac{9}{2\sqrt{6}}$　　(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

(5)　$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2}$　　(6)　$\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$　　(7)　$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$　　(8)　$\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

15　次の計算をせよ．

(1)　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$

●ポイント

①　$a>0$，$b>0$ のとき，$\boldsymbol{m\sqrt{a}\pm n\sqrt{a}=(m\pm n)\sqrt{a}}$，$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$，$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

②　〔分母の有理化〕　分母が $\sqrt{a}$ の形の場合 ⟶ 分母，分子に $\sqrt{a}$ を掛ける．

分母が $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ の形の場合 ⟶ 分母，分子に $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ を掛ける．

例題 7　式の値

次の問いに答えよ．

(1)　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$ のとき，x^2+y^2 の値を求めよ．

(2)　$\sqrt{6}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a^2-b^2 の値を求めよ．

解　(1)　$x+y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2\sqrt{6}$，

$xy=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}=3$ より，

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{6})^2-2\cdot3=\mathbf{18}$

(2)　$2<\sqrt{6}<3$ より，$\sqrt{6}$ の整数部分は 2 となる．よって，$a=2$，$b=\sqrt{6}-2$

$a^2-b^2=2^2-(\sqrt{6}-2)^2=4-(10-4\sqrt{6})=\mathbf{4\sqrt{6}-6}$

16　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$x+y$　　(2)　xy　　(3)　x^2+y^2　　(4)　x^4+y^4

17　$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$x-\dfrac{1}{x}$　　(2)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$

18　$5-\sqrt{2}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a^2+b^2 の値を求めよ．

例題 8　二重根号のはずし方

次の二重根号をはずせ．

(1)　$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$　　(2)　$\sqrt{5-\sqrt{24}}$　　(3)　$\sqrt{4-\sqrt{15}}$

解　$a>b>0$ のとき，$\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ であることを利用する．

(1)　$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3+1+2\sqrt{3\cdot1}}=\mathbf{\sqrt{3}+1}$

(2)　$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2-2\sqrt{3\cdot2}}=\mathbf{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(3)　$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{4-\dfrac{2\sqrt{15}}{2}}=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}$

19　次の二重根号をはずせ．

(1)　$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$　　(2)　$\sqrt{10-2\sqrt{21}}$　　(3)　$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

(4)　$\sqrt{9-2\sqrt{14}}$　　(5)　$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$　　(6)　$\sqrt{12-4\sqrt{5}}$

(7)　$\sqrt{7-\sqrt{24}}$　　(8)　$\sqrt{6+\sqrt{20}}$　　(9)　$\sqrt{4+\sqrt{7}}$

●ポイント

①　$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ $(a>b)$　和が A，積が B となる 2 つの正の数 a，b を求める．

混合問題

A

1 次の小数を分数になおせ.

(1) $0.\dot{4}\dot{2}$　　(2) $0.\dot{5}3\dot{1}$　　(3) $0.4\dot{2}1\dot{6}$

2 次の場合について, $|x+2|-|x-4|$ を簡単にせよ.

(1) $x<-2$　　(2) $-2\leqq x<4$　　(3) $x\geqq 4$

3 次の式を計算せよ.

(1) $(3\sqrt{2}+\sqrt{7})(3\sqrt{2}-\sqrt{7})$　　(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)^2$　　(3) $\dfrac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$　　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$　　(6) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

4 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, $a-\sqrt{3}b$ の値を求めよ.

5 次の二重根号をはずせ.

(1) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$　　(2) $\sqrt{8-\sqrt{60}}$　　(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

B

6 $a\neq 0$ とする. $x=a^2+1$ のとき, 次の場合について, $\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}$ を a の式で表せ.

(1) $a<-1$　　(2) $-1\leqq a<1$ $(a\neq 0)$　　(3) $a\geqq 1$

7 $x+y+z=2\sqrt{3}$, $xy+yz+zx=-3$, $xyz=1$ のとき, 次の式の値を求めよ.

(1) $x^2+y^2+z^2$　　(2) $x^3+y^3+z^3$

8 $x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ のとき, 次の式の値を求めよ.

(1) $x+\dfrac{1}{x}$　　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　　(4) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

■ヒント

6 x に a^2+1 を代入すると, $\sqrt{(\quad)^2}$ の形になる. $\sqrt{(\quad)^2}$ は安易に $\sqrt{}$ をはずしてはいけない.

7 与式を, $x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz で表すことを考える.

8 まず, $x+\dfrac{1}{x}$ の値を求め, それをもとに(2)~(4)の値を求める.

3 1次不等式

例題 1　不等式の表し方

次の数量の間の大小関係を不等式で表せ.

(1)　xを5倍して7を引いた数は，xの2倍より大きい.

(2)　ある学生の3回のテストの点はa点，b点，c点で，その平均点はm点以下である.

解 (1)　大きい，小さいを表すときは，＞，＜を使う. $5x-7>2x$

(2)　以上，以下を表すときは，≧，≦を使う. $\dfrac{a+b+c}{3}\leqq m$

1　次の数量の間の大小関係を不等式で表せ.

(1)　xを2倍して5を足した数は，xの3倍より大きい.

(2)　aとbの和の4倍は，aからbの7倍を引いた数以上である.

(3)　1個agのせっけん20個をbgの箱に入れても，全体で1000gに満たない.

(4)　30kmの道のりを自転車で行くのに，毎時$a$kmの速さで走るとy時間以上かかる.

(5)　1個100円のかきと1個150円のりんごをそれぞれx個とy個買って，z円のケースに入れてもらったら，2500円以下におさまった.

例題 2　不等式の性質

$a>b$のとき，次の□にあてはまる不等号を書け.

(1)　$a-3\ \square\ b-3$　(2)　$\dfrac{a}{3}\ \square\ \dfrac{b}{3}$　(3)　$-2a\ \square\ -2b$

解 (1)　両辺から同じ数を引いても，不等号の向きは変わらない. ＞

(2)　両辺を同じ正の数で割っても，不等号の向きは変わらない. ＞

(3)　両辺に同じ負の数を掛けると，不等号の向きが変わる. ＜

2　$a<b$のとき，次の□にあてはまる不等号を書け.

(1)　$a+6\ \square\ b+6$　(2)　$a-10\ \square\ b-10$

(3)　$-7a\ \square\ -7b$　(4)　$-2+5a\ \square\ -2+5b$

(5)　$\dfrac{3+4a}{7}\ \square\ \dfrac{3+4b}{7}$　(6)　$\dfrac{5-2a}{3}\ \square\ \dfrac{5-2b}{3}$

●ポイント

①　数量の間の大小関係を不等号を使って表した式を**不等式**といい，不等号の左側の部分を**左辺**，右側の部分を**右辺**といい，左辺と右辺を合わせて**両辺**という.

②　〔**不等式の性質**〕(1)　$A<B$ならば，$A+C<B+C$，$A-C<B-C$

(2)　$A<B$，$C>0$ならば，$AC<BC$，$\dfrac{A}{C}<\dfrac{B}{C}$

(3)　$A<B$，$C<0$ならば，$AC>BC$，$\dfrac{A}{C}>\dfrac{B}{C}$

3　$x>y$ のとき，次の2式ではどちらが大きいか．

(1)　$\dfrac{x}{3}+8$，$\dfrac{y}{3}+8$　　(2)　$10-0.6x$，$10-0.6y$　　(3)　$\dfrac{7-x}{2}$，$\dfrac{7-y}{2}$

4　次のような大小関係があるとき，a と b の大小関係を不等号を使って表せ．

(1)　$a-4>b-4$　　(2)　$a+2<b+2$　　(3)　$-6a>-6b$

(4)　$9-4a<9-4b$　　(5)　$\dfrac{a}{5}+3<\dfrac{b}{5}+3$　　(6)　$6-\dfrac{a}{2}<6-\dfrac{b}{2}$

例題 3　基本的な不等式の解法

次の不等式を解け．また，解の集合を数直線上に表せ．

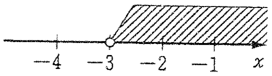
(1)　$x+8>5$　　(2)　$5x\leqq 15$　　(3)　$-\dfrac{x}{3}>2$

解　(1)　$x+8>5$

両辺から8を引く．

$x+8-8>5-8$

$\boldsymbol{x>-3}$

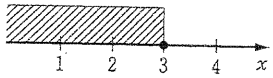


(2)　$5x\leqq 15$

両辺を5で割る．

$\dfrac{5x}{5}\leqq\dfrac{15}{5}$

$\boldsymbol{x\leqq 3}$

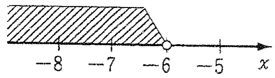


(3)　$-\dfrac{x}{3}>2$

両辺に -3 を掛ける．

$-\dfrac{x}{3}\times(-3)<2\times(-3)$

$\boldsymbol{x<-6}$



5　次の不等式を解け．また，解の集合を数直線上に表せ．

(1)　$x+3>7$　　(2)　$x-1.7<1.8$　　(3)　$-9+x\geqq -3$

6　次の不等式を解け．

(1)　$x+2<1$　　(2)　$x-8\leqq 5$　　(3)　$x+\dfrac{2}{3}>\dfrac{5}{6}$

(4)　$-2.5+x\geqq 0.5$　　(5)　$9x<27$　　(6)　$-8x\leqq 32$

(7)　$-7x>-63$　　(8)　$13x\leqq -169$　　(9)　$-15x<-24$

7　次の不等式を解け．

(1)　$\dfrac{x}{4}>3$　　(2)　$-\dfrac{x}{2}<5$　　(3)　$-\dfrac{x}{7}\geqq -4$

(4)　$\dfrac{1}{4}x\leqq -2$　　(5)　$-\dfrac{3}{8}x\leqq\dfrac{5}{12}$　　(6)　$-\dfrac{2}{9}x>-\dfrac{16}{27}$

●ポイント

① 不等式のすべての解を求めることを，その不等式を**解く**という．

② 不等式を解くには，不等式の性質を利用して，左辺を x だけにする．

③ 不等式の両辺に負の数を掛けたり，両辺を負の数で割ったりすると，不等号の向きが変わる．

④ 不等式の解の集合を数直線上に表すとき，a を含まない場合($x>a$，$x<a$ の場合)は a の点を「○」で，a を含む場合($x\geqq a$，$x\leqq a$ の場合)は a の点を「●」で表す．

例題 4　1次不等式の解法

次の１次不等式を解け．

(1)　$5x-2>3x+4$　　(2)　$2(x+4)-5x\leqq 14$

解

(1)
$5x-2>3x+4$　移項する．
$5x-3x>4+2$　両辺を整理する．
$2x>6$　両辺を２で割る．
$\boldsymbol{x>3}$

(2)
$2(x+4)-5x\leqq 14$　かっこをはずす．
$2x+8-5x\leqq 14$　移項する．
$2x-5x\leqq 14-8$　両辺を整理する．
$-3x\leqq 6$　両辺を -3 で割る．不等号の向きが変わる．
$\boldsymbol{x\geqq -2}$

8　次の１次不等式を解け．

(1)　$4x-8>2x$
(2)　$12-3x\leqq 4x$
(3)　$5-3x\leqq 7-10x$
(4)　$7x-30<10x-9$
(5)　$25x-38\geqq 49x-18$
(6)　$65+36x<11+27x$
(7)　$12x+11<20x-7$
(8)　$200-5x\geqq 3x+64$
(9)　$5(3x-2)<-1$
(10)　$2x-(5x+3)+12\geqq 0$
(11)　$29-7(8-3x)\leqq 18x$
(12)　$3(x-2)>4(x+1)-5$
(13)　$2(x-2)>3(4-x)+4$
(14)　$3(2x-3)-2(1+5x)\geqq 13$
(15)　$4(2x-5)-3x>2-2(x-3)$
(16)　$8x-2(3x+5)\leqq 3x-2(x-10)$

9　次の１次不等式を解け．

(1)　$2.1-x>0.5x$
(2)　$0.4x-1.1<0.7x+3.1$
(3)　$0.45x-0.36<0.38x+0.27$
(4)　$0.11x+0.4\geqq 0.96+0.2x$
(5)　$3.2x+4.2\geqq 2(x-0.6)+1.8$
(6)　$0.3(4x+0.6)<1.5x+0.63$
(7)　$\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}x\leqq\dfrac{1}{3}x$
(8)　$\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{5}>\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$
(9)　$3-\dfrac{5x-1}{3}>2x+1$
(10)　$\dfrac{3x+1}{2}>\dfrac{2x-3}{5}$
(11)　$\dfrac{3}{4}x<\dfrac{2x-1}{2}+\dfrac{3}{4}$
(12)　$\dfrac{-4x+1}{2}-\dfrac{x}{6}\geqq\dfrac{3x-1}{4}+\dfrac{9}{2}$

●ポイント

①　$ax+b>0$ のように，移項して整理すると左辺が x の１次式になる不等式を**１次不等式**という．

②　不等式の両辺に同じ数を足しても，両辺から同じ数を引いても，不等号の向きは変わらない．よって，不等式も方程式の場合と同じように移項ができる．

③　両辺に負の数を掛けたり，両辺を負の数で割ったりするときは，不等号の向きに注意する．

④　小数を含む不等式は，両辺に10，100などを掛けて，係数を整数にする．

⑤　分数を含む不等式は，両辺に分母の最小公倍数を掛けて，分母をはらう．

10 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $2(3x+2)+a>9x$ の解が $x<3$ のとき，a の値を求めよ．

(2) x についての方程式 $7x-2(x-a)=8$ の解が正になるような a の値の範囲を求めよ．

例題 5　1次不等式の応用

1冊110円のノートと1冊80円のノートを合わせて10冊買って，その代金を1000円以下にしたい．1冊110円のノートをできるだけ多く買うには，それぞれ何冊買えばよいか．

解　110円のノートを x 冊買うとすると，80円のノートは $(10-x)$ 冊買うことになる．

よって，不等式は，$110x+80(10-x)\leqq 1000$　これを解くと，$x\leqq 6\frac{2}{3}$

$6\frac{2}{3}$ 以下の最大の自然数は6であるから，110円のノートは**6冊**

$10-6=4$ であるから，80円のノートは**4冊**

11 次の問いに答えよ．

(1) 1個の値段がそれぞれ160円，120円のりんごとみかんを合わせて15個入れた果物かごを作る．かご代150円を含めて，代金の合計が2400円をこえないようにしたい．りんごをできるだけ多く入れるとすると，それぞれ何個入れればよいか．

(2) 野球選手カードをAは46枚，Bは14枚持っている．AがBに何枚かあげても，Aの残りの枚数がBの枚数の2倍より多くなるようにしたい．AはBに何枚まであげられるか．

12 次の問いに答えよ．

(1) A店では，定価が1個800円のある商品を10％引きで売っている．B店では，同じ商品を1ダースまでは定価どおりの800円で，それをこえた分は1個につき定価の17％引きで売っている．この商品を何個以上買うと，B店で買う方がA店で買うより安くなるか．

(2) 5％の食塩水と8％の食塩水がある．5％の食塩水800gと8％の食塩水を何gか混ぜ合わせて6％以上の食塩水を作りたい．8％の食塩水を何g以上混ぜればよいか．

13 次の問いに答えよ．

(1) A地から15km離れたB地まで歩いた．はじめは平らな道を毎時5km，途中から上り坂を毎時3kmの速さで歩いた．所要時間が4時間以内のとき，平らな道は何km以上あったか．

(2) ある美術館の入館料は1人700円で，30人以上の団体は2割引きとなる．この美術館に30人に満たない団体が入館するとき，30人の団体扱いとして入館する方が，通常の料金で入館するより安くなるのは，人数が何人以上のときか．

●ポイント

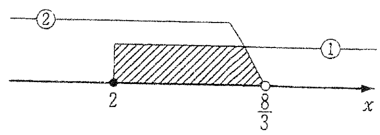
① 問題に述べられた関係から不等式をつくって解き，解の中から条件に合うものを選択する．

例題 6　連立不等式

連立不等式 $\begin{cases} 2x-1 \geqq 3 \\ 3x+4<12 \end{cases}$ を解け．

解　$2x-1 \geqq 3$ を解いて，$x \geqq 2$ ……①

$3x+4<12$ を解いて，$x<\dfrac{8}{3}$ ……②



①，②の共通部分をとって，$\boldsymbol{2 \leqq x<\dfrac{8}{3}}$

14　次の連立不等式を解け．

(1)　$\begin{cases} 2x-3<5 \\ 3x+2 \geqq 8 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} 4x+1 \geqq 2x-3 \\ 4x-3>7x-9 \end{cases}$

(3)　$\begin{cases} 7(x+2)>4x+5 \\ 3(2x+1) \geqq 4x+7 \end{cases}$

(4)　$\begin{cases} 3x+1 \leqq 5(x-1) \\ 5(x-2)+1 \leqq 3(x+1) \end{cases}$

(5)　$\begin{cases} 0.2x-1<0.7x-2 \\ 2.3x-1.4<0.7(2x+7) \end{cases}$

(6)　$\begin{cases} 0.25x-0.18 \geqq 0.6-0.14x \\ 3x+1 \geqq 5x-1 \end{cases}$

(7)　$\begin{cases} \dfrac{8x+12}{7}<x+\dfrac{3}{2} \\ 5-6x>-x-5 \end{cases}$

(8)　$\begin{cases} \dfrac{11}{4}x-\dfrac{3}{2}>2x-5 \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{6} \leqq -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

15　次の不等式を解け．

(1)　$3x+1<x-3<4x+9$

(2)　$3(x-1)-1<5(x+1)-6<2(x-2)+5$

16　次の問いに答えよ．

(1)　１冊120円のノートと１冊80円のノートを合わせて10冊買って，その代金を900円以上1000円以下にしたい．１冊120円のノートは何冊以上何冊以下買えばよいか．

(2)　Ａ地から20km離れたＢ地まで歩いた．はじめは時速６km，途中から時速５kmで歩くと，３時間30分以上３時間40分以下で着いた．時速６kmで歩いた道のりは何km以上何km以下か．

(3)　ある店では，商品に原価の25％の利益を見込んで定価をつける．定価から300円値引きして売っても，なお原価の10％以上15％以下の利益が得られるのは，原価がどのような範囲のときか．

17　x についての連立不等式 $\begin{cases} 4x-5 \leqq 9+2x \\ 3x-2 \leqq 6x-a \end{cases}$ を満たす整数 x の個数が５個となるような a の値の範囲を定めよ．

●ポイント

①　２つ以上の不等式を組み合わせたものを**連立不等式**という．

②　連立不等式を解くには，それぞれの不等式を解いて，それらの解の共通の範囲を求める．

③　連立不等式は必ず解をもつとは限らない．

④　$A<B<C$ のとき，$\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ が同時に成り立つので，これを連立不等式として解けばよい．

例題 7　絶対値を含む方程式

次の方程式を解け．

(1)　$|x-1|=3$　　(2)　$|x+1|=2x$

解　(1)　(i)　$x\geqq 1$ のとき，$x-1=3$ より，$x=4$

(ii)　$x<1$ のとき，$-(x-1)=3$ より，$x=-2$

よって，$\boldsymbol{x=-2,\ 4}$

〔別解〕　$|(\quad)|=a$（a は定数，$a>0$）は，$(\quad)=\pm a$ として解くこともできる．

(2)　(i)　$x\geqq -1$ のとき，$x+1=2x$ より，$x=1$　これは $x\geqq -1$ に適する．

(ii)　$x<-1$ のとき，$-(x+1)=2x$ より，$x=-\dfrac{1}{3}$　これは $x<-1$ に適さない．

よって，$\boldsymbol{x=1}$

18　次の方程式を解け．

(1)　$|x|=2$　　(2)　$|x+1|=4$　　(3)　$|x-3|=8$

(4)　$|3x-2|=6$　　(5)　$|2x-1|-6=5$　　(6)　$3|x-1|+5=7$

19　次の方程式を解け．

(1)　$|x+5|=2x$　　(2)　$|x-1|=2x+1$　　(3)　$|3x-4|=x+8$

例題 8　絶対値を含む不等式

次の不等式を解け．

(1)　$|x+1|<4$　　(2)　$|x+2|>2x$

解　(1)　与えられた不等式は，$-4<x+1<4$ と同じである．

$-4<x+1$ より，$x>-5$　$x+1<4$ より，$x<3$

よって，$\boldsymbol{-5<x<3}$

〔注〕　$|(\quad)|<a \iff -a<(\quad)<a$，$|(\quad)|>a \iff (\quad)>a$，$(\quad)<-a$

ただし，a は定数で，$a>0$

(2)　$x\geqq -2$ のとき，$x+2>2x$ より，$x<2$　よって，$-2\leqq x<2$ ……①

$x<-2$ のとき，$-(x+2)>2x$ より，$x<-\dfrac{2}{3}$　よって，$x<-2$ ……②

①，②のどちらかを満たしていればよいから，$\boldsymbol{x<2}$

20　次の不等式を解け．

(1)　$|x|\leqq 5$　　(2)　$|x+2|<3$　　(3)　$|x-1|\geqq 2$

(4)　$|2x+1|<4$　　(5)　$|3-x|+2>7$　　(6)　$2|5x-2|-5\leqq 3$

21　次の不等式を解け．

(1)　$|x+6|>3x$　　(2)　$|2x-1|\leqq x+2$　　(3)　$x+|x+1|>4x-3$

●ポイント

①　絶対値を含む方程式，不等式では，絶対値記号をはずして解いた解のうち，適するものを選ぶ．