

高校準備講座 第4回 3次式の展開と因数分解

< 3次式の公式 > (複号同順)

$$\begin{array}{l} \text{展 開} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ \textcircled{2} \quad (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \end{array} \right. \\ \\ \text{因数分解} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \\ \textcircled{2} \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \end{array} \right. \end{array}$$

Pattern. 1 3次式の展開

☆POINT☆

- ・ 展開 $\Rightarrow$ すべての項が3次式となる。
- ・ 符号に注意！

(例題 1) 次の式を展開せよ。

※注「 $\cdot$ 」は「 $\times$ 」を表す。

$$\begin{array}{ll} (1) \quad (x-2)^3 & (2) \quad (2x+y)^3 \\ = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-2) + 3 \cdot x \cdot (-2)^2 + (-2)^3 & = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 + y^3 \\ = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 & = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (3) \quad (3a+b)(9a^2-3ab+b^2) & (4) \quad (x-2y)(x^2+2xy+4y^2) \\ \quad \quad \quad (3a)^2 - (3a) \cdot b + b^2 & \quad \quad \quad x^2 + x \cdot 2y + (2y)^2 \\ = (3a)^3 + b^3 & = x^3 - (2y)^3 \\ = 27a^3 + b^3 & = x^3 - 8y^3 \end{array}$$

Pattern. 2 3次式の因数分解

☆POINT☆

- ・ 3次式の 和 or 差 $\Rightarrow a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- ・ 4つの項で最前と最後が3乗の形 $\Rightarrow a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

(例題 2) 次の式を因数分解せよ。

$$(1) x^3 - 8 \\ = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$(2) 64a^3 + 1 \\ = (4a+1)(16a^2 - 4a + 1)$$

$$(3) \frac{x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3}{x^3} \\ = (x-3y)^3$$

$$(4) \frac{8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3}{(2x)^3} \\ = (2x+3y)^3$$

Pattern. 3 特殊な因数分解

★POINT★

・ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \mp 3ab(a+b)$ を利用する。

(例題 3) 次の式を因数分解せよ。

$$(1) x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\ = \frac{(x+y)^3}{A} + z^3 - 3xy \frac{(x+y+z)}{A} \\ = A^3 + z^3 - 3xy(A+z)$$

$$= (A+z)^3 - 3Az(A+z) - 3xy(A+z) \\ = (A+z) \{ (A+z)^2 - 3zA - 3xy \} \\ = (A+z) \{ A^2 + zA + z^2 - 3zA - 3xy \} \\ = (A+z) (A^2 + z^2 - zA - 3xy) \\ = (x+y+z) \{ (x+y)^2 + z^2 - z(x+y) - 3xy \} \\ = (x+y+z) (x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - zx - yz - 3xy) \\ = (x+y+z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$(2) x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

$$= x^3 + y^3 + 1^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot 1$$

or (1) の結果を利用して

$$= (x+y+z) (x^2 + y^2 + 1^2 - xy - y \cdot 1 - 1 \cdot x)$$

$$= (x+y+z) (x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)$$