

第34回 整数②

割り算と最大公約数

2つの自然数 a, b について、 a を b で割ったときの商を q 、余りを r とすると
 a と b の最大公約数は、 b と r の最大公約数に等しい。

(例: $28=12 \cdot 2 + 4$ ← 28 と 12 の最大公約数は、 12 と 4 の最大公約数($=4$)と等しい。)

Pattern. 1 ユークリッドの互除法

★POINT★

大きい数の最大公約数 → 互除法

(例題 1) 次の問いに答えよ。

(1) 1081 と 329 の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求めよ。

(2) $24x + 13y = 1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$(1) 1081 = 329 \cdot 3 + 94$$

$$329 = 94 \cdot 3 + 47$$

$$94 = 47 \cdot 2 + 0$$

94 と 47 で割った余りは 0

であるから、

94 と 47 の最大公約数は 47

よって、 1081 と 329 の最大公約数は 47 である

(2) x, y の係数 24 と 13 について

互除法を用いると、

$$24 = 13 \cdot 1 + 11 \rightarrow 11 = 24 - 13 \cdot 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$13 = 11 \cdot 1 + 2 \rightarrow 2 = 13 - 11 \cdot 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1 \rightarrow 1 = 11 - 2 \cdot 5$$

$$\text{よって } 1 = 11 - 2 \cdot 5$$

$$= 11 - (13 - 11 \cdot 1) \cdot 5 \quad \leftarrow \textcircled{2} \text{ を代入}$$

$$= 11 \cdot 6 + 13 \cdot (-5)$$

$$= (24 - 13 \cdot 1) \cdot 6 + 13 \cdot (-5) \quad \leftarrow \textcircled{1}$$

$$= 24 \cdot 6 + 13 \cdot (-11)$$

すなわち

$$24 \cdot 6 + 13 \cdot (-11) = 1$$

よって、求める整数 x, y の組は 1 つ

$$x = 6, y = -11$$

1 次不定方程式

a, b, c は整数の定数で、 $a \neq 0, b \neq 0$ とする。 x, y の 1 次方程式

$$ax + by = c$$

を成り立たせる整数 x, y の組をこの方程式の 整数解 といい、整数解を求めることを

1 次不定方程式を解く という。

不定方程式
2, 104 | 5
185 | 6
17 | 8
19 | 9
106 | 10
107 | 11
12 | 12
三元不定方程式

Pattern. 2 1 次不定方程式と整数解

$$ax + by = 1 \text{ を満たす}$$

★POINT★

式を満たす整数解を1つ求めて代入!

(例題 2) 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $5x - 3y = 1$

(2) $41x + 15y = 5$

(1) $5x - 3y = 1 \dots \textcircled{1}$

$x=2, y=3$ は整数解の1つである

よって、 $5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1 \dots \textcircled{2}$

① - ② より

$$5(x-2) - 3(y-3) = 0$$

$$5(x-2) = 3(y-3) \dots \textcircled{3}$$

5 と 3 は互いに素であるから

$x-2$ は 3 の倍数である

よって、右を整数として、

$x-2 = 3k$ と表される

これを③に代入

$$5 \cdot 3k = 3(y-3)$$

$$y = 5k + 3$$

したがって、求める整数解は

$$x = 3k + 2, y = 5k + 3 \quad (k \text{ は整数})$$

(2) $41x + 15y = 5 \dots \textcircled{1}$

①の右辺を141に $41x + 15y = 1$

$x=-4, y=11$ は整数解の1つである

(左辺が右辺の10倍は互除法(下)で可)

よって、 $41 \cdot (-4) + 15 \cdot 11 = 1$

両辺に5をかけて $41 \cdot (-20) + 15 \cdot 55 = 5 \dots \textcircled{2}$

① - ② より $41(x+20) + 15(y-55) = 0$

$$41(x+20) = -15(y-55) \dots \textcircled{3}$$

よって $41(x+20) = -15(y-55)$

41 と 15 は互いに素であるから、 $x+20$ は

15 の倍数である。

よって、右を整数として、 $x+20 = 15k$ と表される。

これを③に代入して、 $41 \cdot 15k = -15(y-55)$

$$y = -41k + 55$$

したがって求める整数解は

$$x = 15k - 20, y = -41k + 55$$

<互除法> $41x + 15y = 1$

$$41 = 15 \cdot 2 + 11 \rightarrow 11 = 41 - 15 \cdot 2$$

$$-5 = 11 \cdot 1 + 4 \rightarrow 4 = 15 - 11 \cdot 1$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3 \rightarrow 3 = 11 - 4 \cdot 2$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \rightarrow 1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - (11 - 4 \cdot 2) \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 3 + 11 \cdot (-1) \\ &= (15 - 11 \cdot 1) \cdot 3 + 11 \cdot (-1) \\ &= 11 \cdot (-4) + 15 \cdot 3 \\ &= (41 - 15 \cdot 2) \cdot (-4) + 15 \cdot 3 \\ &= 41 \cdot (-4) + 15 \cdot 11 \end{aligned}$$