

第33回 整数①

最大公約数・最小公倍数

360 と 432 の最大公約数および最小公倍数

素因数分解すると

$$\begin{array}{r} 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 432 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \\ \hline 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \\ = 72 \text{ (最大公約数)} \end{array}$$

指数の
小さい方
を選択

$$\begin{array}{r} 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 432 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \\ \hline 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \\ = 2160 \text{ (最小公倍数)} \end{array}$$

指数の
大きい方
を選択

互いに素

2つの整数の最大公約数が1であるとき、互いに素であるという。(例: 2と3, 17と23など)

a, b, k を整数とすると、 a, b が互いに素で ak が b の倍数であるならば、 k は b の倍数である。

Pattern. 1 最大公約数と最小公倍数

★POINT★

最大公約数 → 指数(小)

最小公倍数 → 指数(大)

(例題1) 次の問いに答えよ。

(1) 126, 147, 216 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(2) n は正の整数とする。 n と 36 の最小公倍数が 504 であるような n をすべて求めよ。

(3) 2数の最大公約数が4で、最小公倍数が84である自然数 $m, n (m < n)$ の組を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad 126 &= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1 \\ 147 &= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 7^2 \\ 216 &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^0 \end{aligned}$$

最大公約数(小) = $2^0 \cdot 3^1 \cdot 7^0 = 3$

最小公倍数(大) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 = 10584$

$$\begin{array}{r} (2) \quad n = \boxed{2^a} \cdot \boxed{3^b} \cdot \boxed{7^c} \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^0 \\ \hline 504 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1 \end{array}$$

よって、 $n = 2^3 \cdot 3^b \cdot 7^1$ ($b = 0, 1, 2$) となる

$n_1 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 7 = 56$

$n_2 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7 = 168$

$n_3 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$

$n = 56, 168, 504$

(3) 2数の最大公約数が4だから

$m = 4a, n = 4b$ (a と b は互いに素)

と表すと、最小公倍数は

$4ab = 84$ より

$ab = 21$

a, b は互いに素で $m < n$ より $a < b$ となる

$(a, b) = (1, 21) / (3, 7)$

$(m, n) = (4, 84) / (12, 28)$

整数の割り算

整数 a と整数 b に対して、以下の式を満たす整数 q, r がただ 1 通りに定まる。

$$a = b \underset{\text{商}}{q} + \underset{\text{余り}}{r}$$

一般に、正の整数 m が与えられると、全ての整数 n は

$$mk, mk+1, mk+2, \dots, mk+(m-1) \quad (k \text{ は整数})$$

のいずれかの形で表される。

$$11 \cdot 2 \cdot 99$$

$$135$$

$$135$$

$$121 \cdot 100$$

$$12100$$

$$12100$$

$$12100$$

Pattern. 2 商と余り

★POINT★

整数の証明 → 整数 a をある正の整数で割った式で表す。

(例題 2) 次の問いに答えよ。

(1) 整数 a は 5 で割ると 1 余り、整数 b は 5 で割ると 3 余る。このとき、 $2a+b, ab$ を 5 で割った余りを求めよ。

(2) n を整数とするとき、 n^2 を 3 で割ったときの余りは、0 か 1 であることを証明せよ。

(i) a, b はある整数 k, l を用いて

$$a = 5k + 1, b = 5l + 3 \text{ と表せる}$$

$$\begin{aligned} 2a+b &= 2(5k+1) + (5l+3) \\ &= 10k+2+5l+3 \\ &= 5(2k+l+1) \end{aligned}$$

よって、 $2a+b$ を 5 で割ったときの余りは 0 である

$$\begin{aligned} ab &= (5k+1)(5l+3) \\ &= 25kl+15k+5l+3 \\ &= 5(5kl+3k+l)+3 \end{aligned}$$

よって、 ab を 5 で割ったときの余りは 3 である

(2) すべて、整数 n は

$$n = 3k, 3k+1, 3k+2 \quad (k \text{ は整数})$$

$$(i) n = 3k \text{ のとき}$$

$$n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2) \quad \text{余り } 0$$

$$(ii) n = 3k+1 \text{ のとき}$$

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \quad \text{余り } 1$$

$$(iii) n = 3k+2 \text{ のとき}$$

$$n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \quad \text{余り } 1$$

よって、 n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 か 1 である。