

第27回 空間図形の計量

Pattern. 1 内接する球

★POINT★

立体に内接する球 → 接点で切り断面図

(例題 1) 図のように、円錐に球が内接している。 $AB = 3a$, $BC = 2a$ のとき、球の半径 r を求めよ。

$$\begin{aligned} AH^2 &= (3a)^2 - a^2 \\ &= 8a^2 \end{aligned}$$

$$AH > 0 \text{ より}$$

$$AH = 2\sqrt{2}a$$

$\triangle ABC$ の面積 a 関係から (2通りで表す)

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}BC \cdot AH \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{2}(2a+3a+3a)r = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2\sqrt{2}a$$

$$4ar = 2\sqrt{2}a^2$$

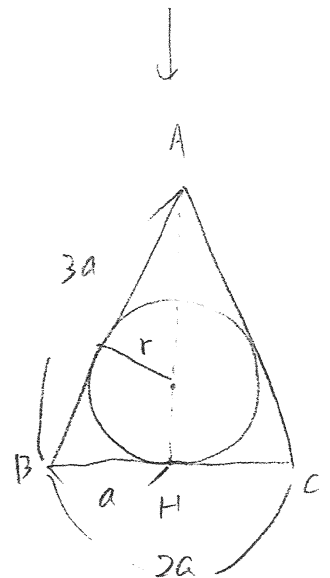
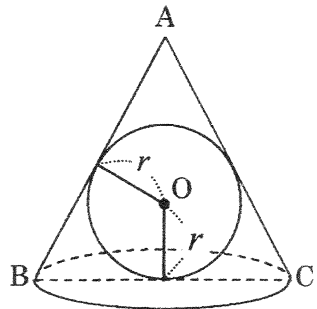
$$r = \frac{2\sqrt{2}a^2}{4a}$$

$$\underline{\underline{r = \frac{\sqrt{2}a}{2}}}$$

< 三角錐に内接する円の半径 r >

(三角錐の表面の三角形の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3, S_4 とする)

$$V = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$



p.103

52
53
704
17

Pattern. 2 三角錐の体積

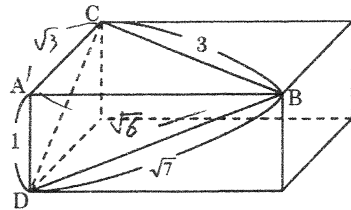
★POINT★

平面図で考える! (底面, 側面, 断面図, 展開図)

(例題 2) 高さ 1 の直方体を右の図のように、頂点 B, C, D を通る平面で切ったら、

$BC = 3, BD = \sqrt{7}$ となった。このとき次の問いに答えよ。

- (1) AB, AC, CD の値を求めよ。
- (2) $\angle BCD$ の大きさを求めよ。
- (3) $\triangle BCD$ の面積 S を求めよ。
- (4) 四面体 $ABCD$ の体積 V を求めよ。
- (5) 頂点 A と面 BCD との距離 h を求めよ。

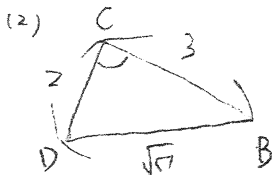


P104

17
18
19

(1) 三平方定理より

$$\begin{array}{lll} \triangle ADB \text{ 中} & \triangle ABC \text{ 中} & \triangle ADC \text{ 中} \\ AB = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 1^2} & AC = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} & CD = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \\ = \sqrt{6} & = \sqrt{3} & = 2 \end{array}$$



$\triangle CDB$ 中 余弦定理より

$$\cos \angle BCD = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{6}{12}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \therefore \angle BCD = 60^\circ$$

$$(3) S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \uparrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(4) $\triangle ABC$ 底面, AD 高さ $\hookrightarrow 2$

$$V = \sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(5) A と BCD の距離 (垂線)

(※) 体積を2通りの式で表す!

A から BCD へ下した垂線の長さを h とする

$$V = \frac{1}{3} Sh$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot h$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{\sqrt{6}}{3}$$