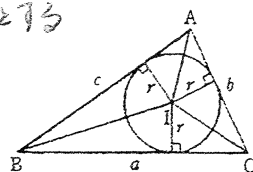


第26回 平面図形の計量

三角形の面積と内接円の半径

※ 内接円の半径を r とする

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$



Pattern. 1 内接円と外接円

★POINT★

・内接円の半径 $r \rightarrow S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ を利用

・外接円の半径 $R \rightarrow$ 正弦定理 を利用

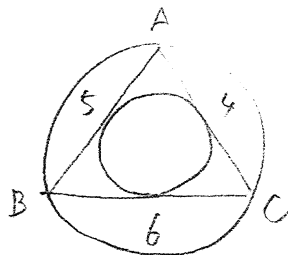
(例題 1) $\triangle ABC$ において、 $a=6, b=4, c=5$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $\cos A, \sin A$

(2) $\triangle ABC$ の面積 S

(3) 外接円の半径 R

(4) 内接円の半径 r



(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{16 + 25 - 36}{40} = \frac{1}{8}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$(2) S = \frac{1}{2} \cdot bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

(3) 正弦定理 $2R = \frac{a}{\sin A}$ より

$$R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin A} = \frac{6 \cdot 8}{2 \cdot 3\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

(4) $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ より

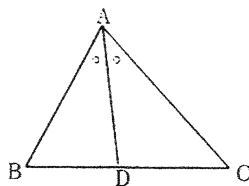
$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2}(6+4+5)r$$

$$r = \frac{15\sqrt{7}}{4} \times \frac{2}{15}$$

$$r = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

三角形の角の二等分線

$$AB:AC = BD:DC$$



Pattern. 2

角の二等分線

★POINT★

角の二等分線の面積 $\Rightarrow$ 2つの三角形の和

(例題 2) $AB = 12, CA = 4, \angle A = 60^\circ$ の $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき、 AD の長さを求めよ。また、 BC, BD, DC の長さを求めよ。

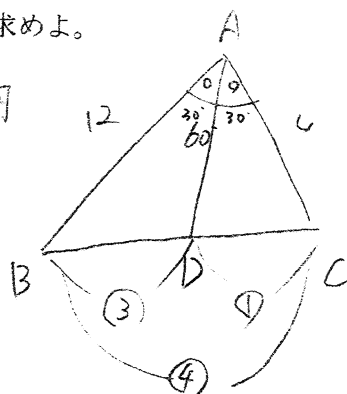
$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC \quad \leftarrow S = \frac{1}{2}bc \sin A \text{ を利用}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AD \cdot \sin 30^\circ$$

$$12\sqrt{3} = 3AD + AD$$

$$4AD = 12\sqrt{3}$$

$$AD = 3\sqrt{3}$$



余弦定理より

$$BC^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 144 + 16 - 48$$

$$= 112$$

$$BC > 0 \text{ より}$$

$$BC = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

AD は $\angle ABC$ の二等分線だから

$$AB:AC = BD:DC = 12:4 = 3:1$$

$$\therefore BD = \frac{3}{4}BC$$

$$= \frac{3}{4} \times 4\sqrt{7}$$

$$= 3\sqrt{7}$$

$$DC = \frac{1}{4}BC$$

$$= \frac{1}{4} \times 4\sqrt{7}$$

$$= \sqrt{7}$$