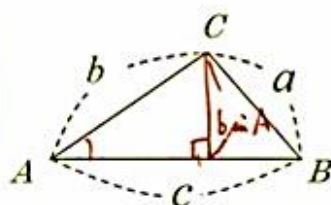


第25回 三角形の面積

三角形の面積

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \left(\begin{array}{l} S = \frac{1}{2} ca \sin B \\ S = \frac{1}{2} ab \sin C \end{array} \right)$$



Pattern. 1 三角形の面積

★POINT★

- ・ 三角形の面積 → 2辺とその間の角の $\sin \theta \times \frac{1}{2}$
- ・ わからない辺・角 → 正弦定理・余弦定理で求める

(例題 1) $\triangle ABC$ において、 $AB = 7$, $BC = 13$, $\angle A = 120^\circ$ のとき、

(1) 線分 AC を x として、 x を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(1) まず図をかき！

余弦定理より

$$13^2 = x^2 + 7^2 - 2 \cdot x \cdot 7 \cos 120^\circ$$

$$169 = x^2 + 49 - 14x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

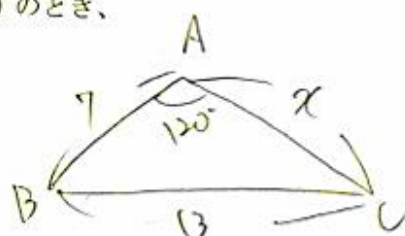
$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$(x-8)(x+15) = 0$$

$$x = 8, -15$$

$$x > 0 \text{ より}$$

$$\underline{x = 8}$$



$$(2) S = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A \text{ より}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \underline{14\sqrt{3}}$$

☆POINT☆

- ・ 対角線をひき、2つの三角形と考える
- ・ わからない辺や角は正弦定理や余弦定理で求める
- ・ 円に内接する四角形 $\Rightarrow$ 対角の和が 180°

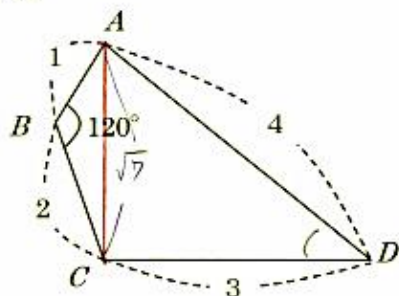
(例題 2) 図のような四角形 $ABCD$ について、次の問いに答えよ。

(1) AC の長さを求めよ。

AC をひいて、 $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ \quad \left(= -\frac{1}{2} \right) \\ &= 1 + 4 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{7}$$



(2) $\cos \angle ADC$ の値を求めよ。 $\triangle ADC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle ADC &= \frac{3^2 + 4^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{9 + 16 - 7}{24} \\ &= \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(3) 四角形 $ABCD$ の面積 S を求めよ。

$$\sin^2 \angle ADC + \cos^2 \angle ADC = 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \angle ADC &= 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{9}{16} \\ &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$$\sin \angle ADC > 0 \text{ より}$$

$$\sin \angle ADC = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$S = \triangle ABC + \triangle ADC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin \angle ADC$$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
 $\left(\frac{\sqrt{7}}{4} \right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{2}$$