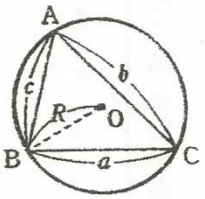
第24回　正弦定理・余弦定理

正弦定理　外接円の半径をRとする

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



Pattern. 1　正弦定理

☆POINT☆

① 向かい合う2組の辺と角

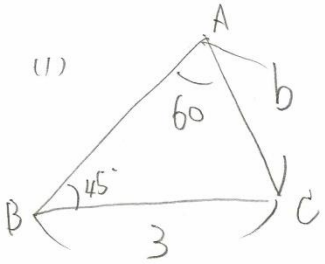
② 向かい合う1組の辺と角，外接円の半径

(例題 1) $\triangle ABC$において、次のものを求めよ。　P.93 1 ～ 6

(1) $A=60^\circ, B=45^\circ, a=3$のとき、$b$と外接円の半径$R$

(2) $B=30^\circ, b=3\sqrt{2}, c=6$のとき　C

(1)



正弦定理より

$\frac{3}{\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sin 45}$

$b=\frac{3}{\sin 60^\circ}\cdot\sin 45$

$=3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{6}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

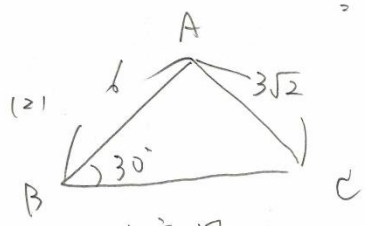
$\frac{3}{\sin 60^\circ}=2R$ より

$R=3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}$

(2)



正弦定理より

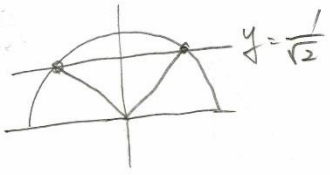
$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\frac{b}{\sin C}$

$\sin C=\frac{\sin 30^\circ}{3\sqrt{2}}\cdot b$

$\sin C=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{3\sqrt{2}}$

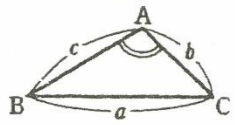
$=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin C=\frac{1}{\sqrt{2}}$



$C=45^\circ, 135^\circ$

余弦定理



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, & \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B, & \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, & \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$$

Pattern. 2 余弦定理

☆POINT☆

・正弦定理との使い分けに注意

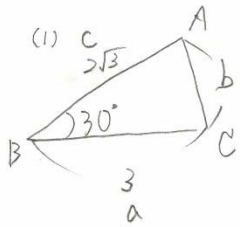
・3辺と1つの角 → 余弦定理

(例題 2) $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。 P.94 17〜19

(1) $a=3, c=2\sqrt{3}, B=30^\circ$ のとき b

(2) $a=1+\sqrt{3}, b=2, c=\sqrt{6}$ のとき C

(1)



余弦定理より

$b^2 = (2\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\cdot \cos 30^\circ$

$= 12 + 9 - 12\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= 21 - 18$

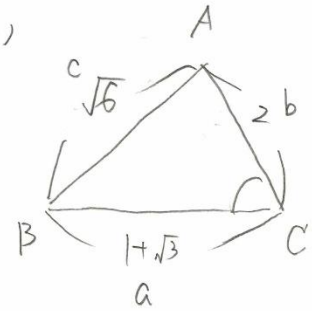
$= 3$

$\therefore b = \pm\sqrt{3}$

$b > 0$ より

$b = \sqrt{3}$

(2)



余弦定理より

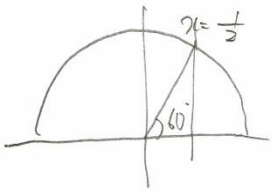
$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{3})^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}$

$= \dfrac{1+2\sqrt{3}+3+4-6}{4(1+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{2+2\sqrt{3}}{4+4\sqrt{3}} = \dfrac{2(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2}$

$\cos C = \dfrac{1}{2}$ より



$C = 60^\circ$