

第 22 回 三角比の相互関係

三角比の相互関係

$$\textcircled{1} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\textcircled{2} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\textcircled{3} 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

Pattern. 1 他の三角比の値

★POINT★

- $\sin \theta$ がわかっているとき: $\sin \theta \xrightarrow{\textcircled{1}} \cos \theta \xrightarrow{\textcircled{2}} \tan \theta$
- $\cos \theta$ がわかっているとき: $\cos \theta \xrightarrow{\textcircled{1}} \sin \theta \xrightarrow{\textcircled{2}} \tan \theta$
- $\tan \theta$ がわかっているとき: $\tan \theta \xrightarrow{\textcircled{3}} \cos \theta \xrightarrow{\textcircled{1}} \sin \theta$

(例題 1) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ のとき、 $\sin \theta, \tan \theta$ の値を求めよ。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad \leftarrow \text{代入}$$

$$= 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \leftarrow \text{平方根}$$

$$\begin{aligned} 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より} \\ \sin \theta \geq 0 \text{ より} \\ \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \sin \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

※三角比の範囲に注意 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき)

$$0 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1, \quad \tan \theta \text{ は全ての実数}$$

Pattern. 2 相互関係の利用

★POINT★

$\sin \theta$ と $\cos \theta$ を表して、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使う!

(例題 2) $\left(1 + \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta}\right) \left(1 + \frac{1}{\tan \theta} - \frac{1}{\sin \theta}\right)$ を簡単にせよ。

$$(5式) = \left(1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right) \left(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta}\right)$$

$$= \frac{\cos \theta + \sin \theta + 1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta}$$

$$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta + \cos \theta &= A \quad \text{と置く} \\ (A+1)(A-1) &= A^2 - 1 \quad \text{を利用} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \quad \text{を利用} \\ &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

Pattern. 3 三角比の式の値

★POINT★

$\sin \theta, \cos \theta$ を含む条件式 $\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を利用する!

両辺を 2 乗 or 代入

(例題 3) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) のとき、次の値を求めよ。対称式!

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

(1) 与式の両辺を 2 乗してみると。

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9} - 1$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{9}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18}$$

$$(2) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{5}{18}\right) \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{8}{27} + \frac{5}{9}$$

$$= \frac{8}{27} + \frac{15}{27}$$

$$= \frac{23}{27}$$

$$\textcircled{2} \left(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta) (\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \right)$$

$$(1 + \sin \theta \cos \theta)$$

1:111