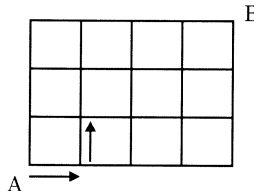


第9回 最短経路・重複組合せ

Pattern. 1 最短経路 (同じものを含む順列)

★POINT★



↑の図では $\frac{7!}{4!3!}$ 通り

<ヨタヨタウォーク>

A 地点から B 地点まで n 回で到着する最短経路は

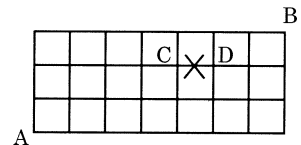
ヨコを p 回, タテを q 回進めばよい。⇒ $\frac{n!}{p!q!}$ 通り

(例題 1) 右図のような道路がある。このとき次の問いに答えよ。

(1) A から B へ行く最短の道順は何通りあるか。

ヨコ 7回, タテ 3回, 合計 10回進む

$$\frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ 通り}$$



(2)(1)のうち、CD間を通らない道順は何通りあるか。

★余事象 全 - (CDを通る)

$$\text{CDを通る} = \frac{6!}{4!2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \cdot 1 \cdot 3 = 45$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A \sim C & CD & D \sim B \end{array}$

よって、CDを通らないのは

$$120 - 45 = 75 \text{ 通り}$$

$\begin{array}{l} p=5 \quad \boxed{31} \\ \quad \quad \boxed{32} \\ \quad \quad \boxed{33} \\ \quad \quad \boxed{34} \\ p=7 \quad \boxed{5} \end{array}$

Pattern. 2 重複組合せ (同じものを含む順列)

☆POINT☆

合計が決まっている数種類の個数の内訳

- ・ $\bigcirc$ と仕切り $\square$ を使って「同じものを含む順列」で解く。
- ・ n 個の分けるものと $\bigcirc$ 、「種類 - 1」個の仕切り $\square$ を 1 列に並べる。
- ・ 「最低 1 つずつ入れる」 → 先に 1 つずつ分け、総数を減らす。

(例題 2) オレンジ、イチゴ、キウイを使って、7 個入りの果物かごを作りたい。

このとき次の問いに答えよ。

(1) 1 つも入らない種類があってもよいとすると何通りか。

(例) $\overset{\text{オレンジ}}{\bigcirc\bigcirc} \square \overset{\text{イチゴ}}{\bigcirc\bigcirc} \square \overset{\text{キウイ}}{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}$

$\bigcirc 7コ, \square 2コ$ 合わせて $9コ$ を並べる

$$\frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 36 \text{ 通り}$$

← 2つの仕切りの
左がオレンジ
中がイチゴ
右がキウイ

$\begin{array}{|c|} \hline 155 \\ \hline \end{array}$) 155
 $\begin{array}{|c|} \hline 36 \\ \hline \end{array}$) 36
 $\begin{array}{|c|} \hline 37 \\ \hline \end{array}$) 37
 $\begin{array}{|c|} \hline 38 \\ \hline \end{array}$) 38
 $\begin{array}{|c|} \hline 39 \\ \hline \end{array}$) 39

(2) どの種類の果物も、少なくとも 1 つ入れるとすると何通りか。

7つのうち 1種類ずつ 3コを先に分ける。⇒ $\bigcirc$ は残り 4つ

(例) $\overset{\text{オレンジ}}{\bigcirc\bigcirc} \square \overset{\text{イチゴ}}{\bigcirc\bigcirc} \square \overset{\text{キウイ}}{\bigcirc\bigcirc}$

↑ ここには少なくとも 1 つずつは入れている。

$\bigcirc 4コ, \square 2コ$ を合わせて $6コ$ を並べる

$$\frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 15 \text{ 通り}$$