

第 9 $\frac{3}{4}$ 回 同じものを含む順列(2)

Pattern. 1 (同じものを含むじゅず順列)

☆POINT☆

- すべて異なるもの $\rightarrow$ (円順列の数) $\div 2$
のじゅず順列
- 同じものを含む $\rightarrow \{(\text{円順列の数}) - (\text{左右対称の数})\} \div 2 + (\text{左右対称の数})$
じゅず順列

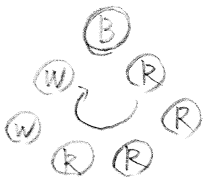
(例題1) 次のような玉を用いて首飾りを作るとき、何通りの首飾りができるか。

(1) 異なる色の玉 6 個

$$\frac{(6-1)!}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 60 \quad \underline{A. 60 \text{通り}}$$

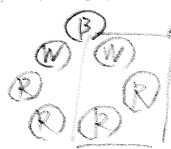
(2) 赤玉 4 個、白玉 2 個、青玉 1 個

青玉を固定して、(B)から見ると R 4コ, W 2コが 1 列に並んでいるから
同じものを含む順列



$$\frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 2} = 15 \text{通り (円順列の数)}$$

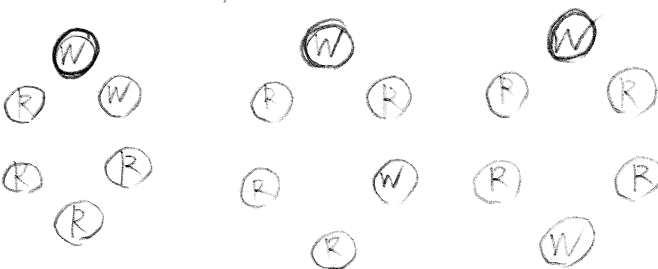
左右対称の数



R 2コ, W 1コが 1 列に並んでいるから
 $\frac{3!}{2!} = 3 \text{通り (左右対称の数)}$

(3) 赤玉 4 個、白球 2 個

白玉 1コを固定して



よって、求めるじゅず順列は
 $(15 - 3) \div 2 + 3 = 6 + 3 = 9 \text{通り}$

の 3通り

Pattern. 2 整数解の個数 (同じものを含む順列)

☆POINT☆

整数解の個数 → 重複組合せ → 同じものを含む順列

(例題 2) 次の式を満たす整数解の組は何通りあるか。

(1) $x + y + z = 10$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)

○を10個, □を2個合わせて12個を並べる

$$\frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 2} = 66$$

A. 66通り

(2) $x + y + z = 10$ ($x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$)

○を x, y, z に1ずつ分配しておく, 残り7個を考える

○を7個, □を2個合計9個を並べる

$$\frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 2} = 36$$

A. 36通り

(3) $x + y + z \leq 10$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)

$u = 10 - (x + y + z)$ とする. $u \geq 0$

$x + y + z + u = 10$ と考える

○を10個, □を3個合計13個を並べる

$$\frac{13!}{10! \cdot 3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 3 \cdot 2} = 286$$

A. 286通り