第4回　　集合と命題(4)

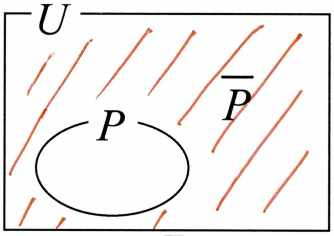
・**条件の否定**…条件に対して、「p でない」という条件を p の**否定**といい、$\overline{p}$ と表す。

例）　「x は奇数」の否定は「x は偶数」
　　　「$x>2$」の否定は「$x \leqq 2$」

・**「かつ」・「または」と否定**

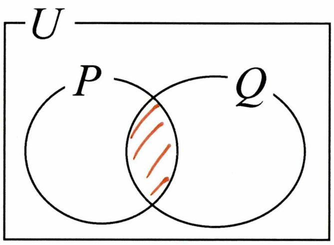
全体集合を U とし、条件 p , q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P,Q とすると、

$\overline{p}$



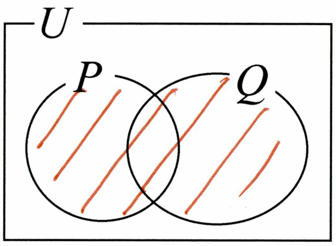
補集合 $\overline{P}$

「p かつ q」



共通部分 $P \cap Q$

「p または q」



和集合 $P \cup Q$

Pattern. 1　条件の否定

☆POINT☆

・$\overline{p\text{かつ}q} \iff \overline{p}\text{または}\overline{q}$,　$\overline{p\text{または}q} \iff \overline{p}\text{かつ}\overline{q}$ （ド・モルガンの法則）

・「すべて（任意の）」の否定は「ある…」

・「少なくとも1つが p」の否定は「すべて p でない」

(例題 1)次の条件の否定を述べよ。

(1)　「$x \neq 0$」

$x=0$

(2)　「$x=0$ かつ $y=0$」

$x \neq 0$ または $y \neq 0$

(3)　「$x>0$ かつ $y>0$」

「$x \leqq 0$ または $y \leqq 0$」

(4)「x, y はともに有理数である。」

「x, y のうち 少なくとも 一方は 無理数である」

・**命題の「逆」「裏」「対偶」**

「**命題**」 $p \Longrightarrow q$ 「pならばq」に対して

「**逆**」 $q \Longrightarrow p$ 「qならばp」(左右入れ替える！)

「**裏**」 $\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ 「pでないならばqでない」(両方否定する！)

「**対偶**」 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ 「qでないならばpでない」(左右入れ替えて、否定する！)

例) xを実数とするとき、

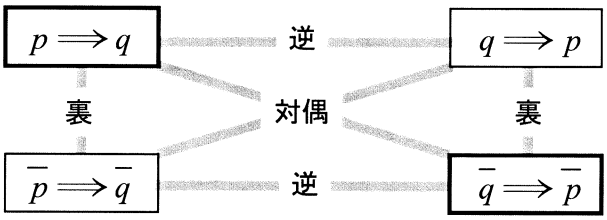
命題 :「$x=1 \Longrightarrow x^2=1$」(真)
逆 :「$x^2=1 \Longrightarrow x=1$」(偽)
裏 :「$x \neq 1 \Longrightarrow x^2 \neq 1$」(偽)
対偶 :「$x^2 \neq 1 \Longrightarrow x \neq 1$」(真)

「命題」と「対偶」の真偽は一致する。

・**背理法**…ある命題を証明するのに、その命題を否定して、矛盾すを導き出すことでもとの命題が成り立つことを証明する方法。

Pattern. 2 命題の・逆・裏・対偶

☆POINT☆



※対偶どうしは真偽は一致

※逆は真・偽のどちらもある。

(例題 2)次の命題の逆裏対偶を述べ、それらの真偽ともとの命題の真偽をいえ。

命題「$x+y \neq 0$ならば$x \neq 0$または$y \neq 0$である。」

逆「$x \neq 0$ または $y \neq 0$ ならば $x+y \neq 0$」偽 ($x=1$, $y=-1$ のとき $x+y=0$)

裏「$x+y=0$ ならば、$x=0$ かつ $y=0$」偽 ( )

対偶「$x=0$ かつ $y=0$ ならば $x+y=0$」真

対偶が真であるからもとの命題も真である。