

第4.5回 集合と命題(5)証明 <解答編>

4 1 a, b, c, x は実数とする。次の $\square$ の中は、
「必要条件であるが十分条件ではない」
「十分条件であるが必要条件ではない」
「必要十分条件である」
「必要条件でも十分条件でもない」
のうち、それぞれどれが適するか。

- (1) $x=2$ は $x^2+x-6=0$ であるための $\square$ 。
- (2) $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ は、 $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ であるための $\square$ 。
- (3) $a=b$ は $a+c=b+c$ であるための $\square$ 。
- (4) $a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\square$ 。

【解答】 (1) $x=2$ のとき $x^2+x-6=2^2+2-6=0$

よって、「 $x=2 \implies x^2+x-6=0$ 」は真である。

$x^2+x-6=0$ を解くと $x=-3, 2$

よって、「 $x^2+x-6=0 \implies x=2$ 」は偽である。

したがって、十分条件であるが必要条件ではない。

(2) 「 $\triangle ABC \sim \triangle PQR \implies \triangle ABC \equiv \triangle PQR$ 」は偽であり、

「 $\triangle ABC \equiv \triangle PQR \implies \triangle ABC \sim \triangle PQR$ 」は真である。

したがって、必要条件であるが十分条件ではない。

(3) $a=b$ のとき、この両辺に c を加えると $a+c=b+c$

よって、「 $a=b \implies a+c=b+c$ 」は真である。

$a+c=b+c$ のとき、この両辺から c を引くと $a=b$

よって、「 $a+c=b+c \implies a=b$ 」は真である。

したがって、必要十分条件である。

(4) $a=1, b=-2$ のとき、 $a>b$ であるが、 $a^2>b^2$ でない。

よって、「 $a>b \implies a^2>b^2$ 」は偽である。

$a=-2, b=1$ のとき、 $a^2>b^2$ であるが、 $a>b$ でない。

よって、「 $a^2>b^2 \implies a>b$ 」は偽である。

したがって、必要条件でも十分条件でもない。

4 2 a, b は実数とする。次の2つの条件 p, q は同値であることを証明せよ。

$p: a>1$ かつ $b>1$ $q: a+b>2$ かつ $(a-1)(b-1)>0$

【解答】 [1] $p: a>1$ かつ $b>1$ が成り立つとき

p の2式を辺々加えると $a+b>2$

また、 $a-1>0$ かつ $b-1>0$ であるから $(a-1)(b-1)>0$

よって、 $p \implies q$ は真である。

[2] $q: a+b>2$ かつ $(a-1)(b-1)>0$ が成り立つとき

$(a-1)(b-1)>0$ から

$a-1>0$ かつ $b-1>0$ または $a-1<0$ かつ $b-1<0$

すなわち (ア) $a>1$ かつ $b>1$ または (イ) $a<1$ かつ $b<1$

(ア)、(イ)のうち、 $a+b>2$ を満たすのは(ア)の場合である。

(ア)は条件 p に一致するから、 $q \implies p$ は真である。

[1], [2]より、 $p \iff q$ が成り立つから、 p と q は同値である。

■ $p \implies q$ が真なら、 p は q であるための

十分条件

$q \implies p$ が真なら、 p は

q であるための

必要条件

■ $p \iff q$ が成り立つな

ら、 p は q であるための

必要十分条件

← $x=-3$ が反例。

← $a^2=1, b^2=4$

← $a^2=4, b^2=1$

■ p と q が同値であることの証明

$p \implies q$ と $q \implies p$ がともに真であることを示す。

4 3 次の命題の否定を述べよ。また、否定の真偽を調べよ。

(1) すべての素数 n について、 n は奇数である。

(2) ある実数 x について $x^2 \leq 0$

【解答】 (1) 否定は 「ある素数 n について、 n は偶数である。」

2は素数であり、かつ偶数であるから、否定は真である。

(2) 否定は 「すべての実数 x について $x^2 > 0$ 」

$x=0$ のとき $x^2=0$ となるから、否定は偽である。

■ 「すべての x について p 」の否定は

「ある x について $\bar{p}$ 」

■ 「ある x について p 」

の否定は

「すべての x について $\bar{p}$ 」

301 (1) 十分条件であるが必要条件ではない

(2) 必要十分条件である

(3) 十分条件であるが必要条件ではない

(4) 必要条件であるが十分条件ではない

(5) 必要条件でも十分条件でもない

(6) 必要条件であるが十分条件ではない

302 (1) 必要条件であるが十分条件ではない

(2) 必要条件であるが十分条件ではない

(3) 十分条件であるが必要条件ではない

303 [($p \implies q$ が真であることの証明)]

p の2式を辺々加えると $a+b<5$

また、 $a-2<0$ かつ $b-3<0$ であるから

$(a-2)(b-3)>0$

($q \implies p$ が真であることの証明)

$(a-2)(b-3)>0$ から

(ア) $a>2$ かつ $b>3$ または

(イ) $a<2$ かつ $b<3$

このうち、 $a+b<5$ を満たすのは(イ)の場合]

304 (1) ある実数 x について $(x+1)^2 \leq 0$;

もとの命題は偽、否定は真

(2) すべての自然数 n について $n^2 \neq 5$;

もとの命題は偽、否定は真