

第4.5回 集合と命題(5)証明



★
必要条件
十分条件

- 41 a, b, c, x は実数とする。次の $\square$ の中は、
「必要条件であるが十分条件ではない」
「十分条件であるが必要条件ではない」
「必要十分条件である」「必要条件でも十分条件でもない」

のうち、それぞれどれが適するか。

- (1) $x=2$ は $x^2+x-6=0$ であるための $\square$ 。
- (2) $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ は、 $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ であるための $\square$ 。
- (3) $a=b$ は $a+c=b+c$ であるための $\square$ 。
- (4) $a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\square$ 。

ポイント① p が q であるための何条件であるかを判定するには、
 $p \implies q$ と $q \implies p$ の真偽を調べる。
 $p \implies q$ が真なら、 p は q であるための十分条件
 $q \implies p$ が真なら、 p は q であるための必要条件

★★★
同値

- 42 a, b は実数とする。次の2つの条件 p, q は同値であることを証明せよ。

$$p: a>1 \text{ かつ } b>1 \quad q: a+b>2 \text{ かつ } (a-1)(b-1)>0$$

ポイント② p と q が同値 $p \implies q$ と $q \implies p$ がともに真であることを示す。

★★★★
「すべて」
「ある」

- 43 次の命題の否定を述べよ。また、もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

- (1) すべての素数 n について、 n は奇数である。
- (2) ある実数 x について $x^2 \leq 0$

ポイント③ 「すべての x について p 」の否定は「ある x について $\bar{p}$ 」
「ある x について p 」の否定は「すべての x について $\bar{p}$ 」

重要事項

◆必要条件・十分条件・必要十分条件

1. $p \implies q$ が真であるとき q は p であるための 必要条件
 p は q であるための 十分条件 という。
2. $p \implies q$ と $q \implies p$ がともに真であるとき、すなわち $p \iff q$ が成り立つとき、
 q は p であるための 必要十分条件
という。この場合、 p は q であるための必要十分条件であるともいう。
また、このとき、 p と q は互いに 同値 であるという。

■ 次の $\square$ の中は、

- 「必要条件であるが十分条件ではない」
「十分条件であるが必要条件ではない」
「必要十分条件である」
「必要条件でも十分条件でもない」

のうち、それぞれどれが適するか。[301, 302]

- 301 a, b, c, x は実数とする。

.....①

- * (1) $a=3$ かつ $b=2$ は $a+b=5$ であるための $\square$ 。
- * (2) $x=3$ は $x^2-6x+9=0$ であるための $\square$ 。
- (3) $x>2$ は $x>1$ であるための $\square$ 。
- * (4) 四角形の2本の対角線の長さが等しいことは、長方形であるための $\square$ 。
- * (5) $a<b$ は $ac<bc$ であるための $\square$ 。
- (6) 4かつ6の倍数であることは、24の倍数であるための $\square$ 。



- * 302 (1) x, y は実数とする。 $x+y, xy$ がともに有理数であることは、 x, y がともに有理数であるための $\square$ 。

.....①

- (2) $\angle A < 90^\circ$ かつ $\angle B < 90^\circ$ は、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための $\square$ 。
- (3) i, j, k は整数とする。和 $i+j+k$ が偶数であることは、積 ijk が偶数であるための $\square$ 。

- 303 a, b は実数とする。次の2つの条件 p, q は同値であることを証明せよ。

.....②

$$p: a<2 \text{ かつ } b<3 \quad q: a+b<5 \text{ かつ } (a-2)(b-3)>0$$

発展

- 304 次の命題の否定を述べよ。また、否定の真偽を調べよ。

.....③

- (1) すべての実数 x について $(x+1)^2 > 0$
- (2) ある自然数 n について $n^2=5$