4．中点連結定理

(1)中点連結定理

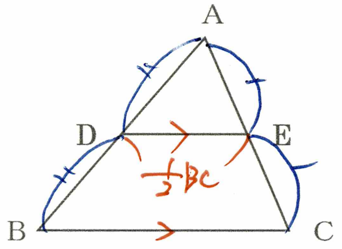
(例題7)の①, ②をまとめると、次の定理がいえる。

定理 ＜中点連結定理＞

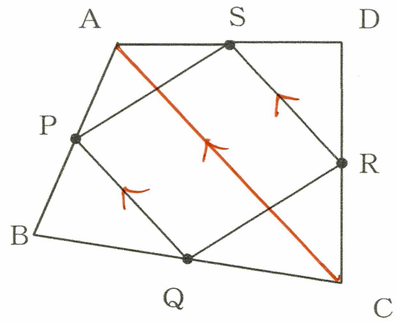
△ABCにおいて、点 D, E がそれぞれ

辺AB、ACの中点ならば

$$\begin{cases} DE \parallel BC \\ DE = \frac{1}{2}BC \end{cases}$$



(例題8)図のような四角形ABCDにおいて辺AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれP, Q, R, Sとするとき、四角形PQRSは平行四辺形になることを証明しなさい。



[証明]補助線 AC をひく

△BCAにおいて、点P, Qはそれぞれ

AB, ACの中点だから だから

中点連結定理 より

$PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{1}{2}AC$ …①

△DACにおいて 同様 にして

$SR \parallel AC$, $SR = \frac{1}{2}AC$ …②

①, ②より $PQ \parallel SR$, $PQ = SR$

よって 1組の対辺が平行で等しい から

四角形PQRSは平行四辺形である。

＜平行四辺形になるための条件＞

①2組の対辺がそれぞれ平行。

②2組の対辺がそれぞれ等しい。

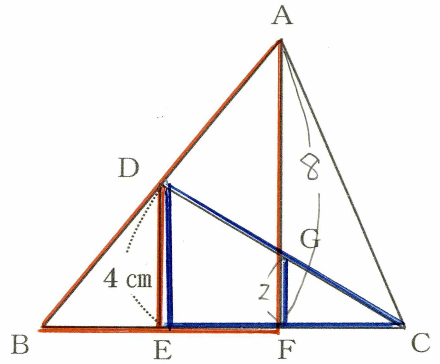
③2組の対角がそれぞれ等しい。

④2つの対角線がそれぞれの中点で交わる。

⑤1組の対辺が平行で等しい。

(2) 中点連結定理の利用

(例題9) 右に図で点Dは辺ABの中点であり、点E，点Fは辺BCを3等分する点である。AGの長さを求めよ。



△BAFで D, Eは中点だから $AF = 2DE$

$= 2 \times 4$

$= 8$ cm

△CDEで G, Fは中点だから $GF = \frac{1}{2}DE$

$= \frac{1}{2} \times 4$

$= 2$ cm

$AG = AF - GF$

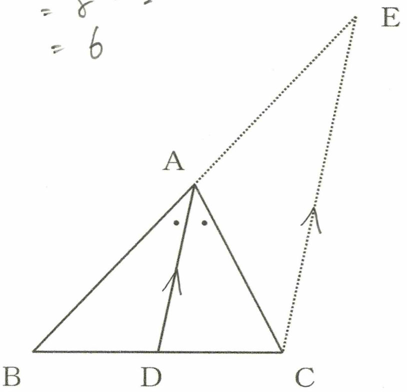
$= 8 - 2$

$= 6$

5．相似の応用

(1) 角の二等分線と比

(例10) △ABCで、∠Aの2等分線をひき、辺Bとの交点をDとすると、AB:AC＝BD:CDであることを証明せよ。



［証明］ 点Cを通り、DAに平行な直線がBAの延長線と交わる点をEとする。

△ACEにおいて、AD // ECだから

∠BAD＝ ∠AEC ，∠CAD＝ ∠ACE

仮定より∠BAD＝∠CADだから，∠AEC＝ ∠ACE

よって、△ACEは 2つの角が等しい から

二等辺三角形であり、 AE＝ AC …①

AD // EC だから 三角形と比 の定理より

BA:AE＝ BD : DC …②

①、②より AB:AC＝ BD : DC

＜角の二等分線と比＞

△ABCの∠Aの二等分線と辺BCの交点をDとすると、

AB : AC = BD : DC

a : b = p : q