

1. すべての実数 x に対して、不等式 $x^2 + kx + k + 3 > 0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

2. すべての実数 x に対して、不等式 $ax^2 - 2ax - a + 1 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

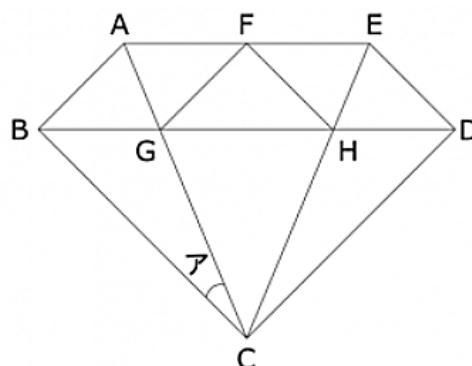
<Challenge!!>

2 次不等式 $x^2 - (a+3)x + 3a < 0$ を満たす整数 x がちょうど 2 個だけあるように、定数 a の値の範囲を定めよ。

<楽しい角度問題>

問題 (お茶の水女子大学附属中学 受験問題 2020年 算数)

難易度★★



上の図で、直線AEと直線BDは平行です。
 三角形BCDと三角形FGHは直角二等辺三角形
 です。四角形ABGFと四角形FHDEはひし形
 です。点Gは直線ACの上に、点Hは直線ECの
 上にあります。このとき、アの角度は何度ですか。

類 題

- すべての実数 x に対して、不等式 $x^2 - 2ax - a > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。
- すべての実数 x に対して、不等式 $kx^2 + (3k - 2)x - 2k + 6 > 0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

漢検 2 級 漢字テスト 33 氏名

次の文のカタカナを漢字に直せ。(送り仮名もかく)

9/29

※配点 ①～⑫ 各 0.5 点

得点

⑪ ソウギョウに床を出て家事をする	⑨ ハキに満ちている	⑦ 漢文学の勉強会をシュサイしている	⑤ 工事のシンチョク状況を尋ねた	③ 人知れずソウトを抱く	① 感染症拡大防止のためのボウエキ体制
⑫ 頭痛とオカンがしてきた	⑩ 女王にエッケンを申しでる	⑧ 参詣してごりやくにあずかった	⑥ ジュンボクの氣風が残る	④ 飽くことなくキョウラクにふけた	② コウズカの珍重する品

1. すべての実数で成り立つ不等式

$$-2 < k < 6$$

2. すべての実数で成り立つ不等式

$$0 < a \leq \frac{1}{2}$$

<Challenge!> (+5点)

$$0 \leq a < 1, \quad 5 < a \leq 6$$

<角度問題> (+5点)

$$22.5^\circ$$

類 題

1. すべての実数で成り立つ不等式

$$-1 < a < 0$$

2. すべての実数で成り立つ不等式

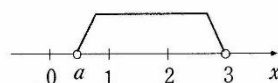
$$\frac{2}{17} < k < 2$$

左辺を因数分解すると

$$(x-a)(x-3) < 0 \quad \dots\dots ①$$

[1] $a < 3$ のとき, ① の解は $a < x < 3$

これを満たす整数 x
がちょうど2個ある
とき, その整数 x は
1, 2 となる。

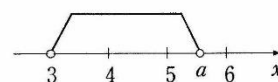


よって $0 \leq a < 1$

[2] $a = 3$ のとき, ① は $(x-3)^2 < 0$ となるから,
解はない。よって, 条件を満たさない。

[3] $a > 3$ のとき, ① の解は $3 < x < a$

これを満たす整数 x
がちょうど2個ある
とき, その整数 x は
4, 5 となる。



よって $5 < a \leq 6$

以上から, 求める a の値の範囲は

⑪ ソウギョウウに床を出て家事をする	⑨ ハキに満ちている	⑦ 漢文字の勉強会をシュサイしている	⑤ 工事のシンチヨク状況を尋ねた	③ 人知れずソウトを抱く	① 感染症拡大防止のためのボウエキ体制
早暁	覇気	主宰	進捗	壮図	防疫
⑫ 頭痛とオカンがしてきた	⑩ 女王にエツケンを申し立てる	⑧ 参詣してゴリヤクにあずかった	⑥ ジュンボクの気風が残る	④ 飽くことなくキョウラクにふけた	② コウズカの珍重する品
悪寒	謁見	利益	純朴	享楽	好事家

<楽しい角度問題>

$$1. x^2 + kx + k + 3 > 0$$

すべての実数 x について不等式が成り立つには $D < 0$ とすれば良い。

$$D = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 3) < 0$$

$$k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$(k + 2)(k - 6) < 0$$

$$\underline{-2 < k < 6}$$

2. すべての実数 x で、 $ax^2 - 2ax - a + 1 > 0$ が成り立つためには、 $y = ax^2 - 2ax - a + 1 \dots ①$ のグラフが、 x 軸より常に上側にあればよい。

(i) $a = 0$ のとき、①は $y = 1$

となり、条件を満たす。

よって、 $a = 0$ のときは成り立つ。

(ii) $a \neq 0$ のとき、①は2次関数となるから次の条件を満たせばよい。

$$\begin{cases} a > 0 & \dots ② \\ \frac{D}{4} = (-a)^2 - a(-a + 1) < 0 \dots ③ \end{cases}$$

$$③より \quad 2a^2 - a < 0$$

$$a(2a - 1) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a < \frac{1}{2} \dots ③'$$

$$②, ③'より \quad 0 < a < \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, (i), (ii)より} \quad 0 \leq a < \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

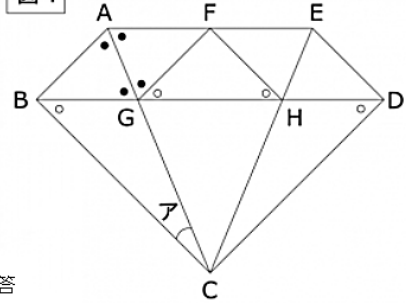
(ii)の別解 $a \neq 0$ のとき、①は2次関数となる。

$$\begin{aligned} y &= a(x^2 - 2x) - a + 1 \\ &= a(x - 1)^2 - 2a + 1 \end{aligned}$$

(最小値) > 0 となればよいので

$$\begin{cases} a > 0 \\ -2a + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{よって,} \quad 0 < a < \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

図1



解答

上の図1に、45度を○で示しました。

四角形ABGFがひし形なので、対角線AGによって同じ角度●が4個現れます。また、ABとFGが平行なので、

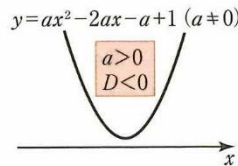
角ABG = 角FGH = 45度

となり、角ABCは直角とわかります。

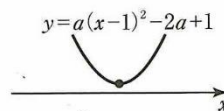
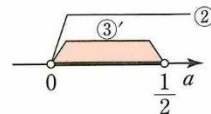
● = $(180 - 45) \div 2 = 67.5$ 度なので、

角度ア = $180 - (\text{角ABC} + \text{角BAG}) = 22.5$ 度と求められます。

◀問題文において、“不等式”としかかいてないので、 $a \neq 0$ とは限らない(2次不等式とは限らない)ので場合分けが必要です。



グラフが「下に凸」で、かつ「 x 軸と共有点をもたない」ことが条件です。



◀最小値をもつには下に凸でなければならないので(x^2 の係数) > 0 が必要です。