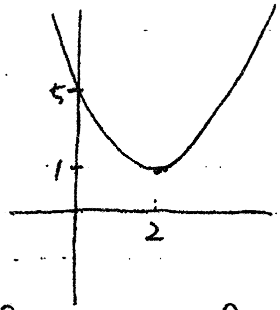
補充問題＜2次関数の最大・最小＞

(練習1) $y=x^2-4x+5$ $(a \le x \le a+1)$

$y=(x-2)^2-4+5$　　区間の中心 $\left(\frac{a+a+1}{2}=\frac{2a+1}{2}\right)$

$y=(x-2)^2+1$



頂点 $(2,1)$　軸 $x=2$

$\left(f(2)=1 \quad f(a)=a^2-4a+5 \quad f(a+1)=a^2-2a+2\right)$

(1) 最小値

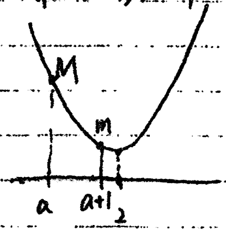
(i) $a+1<2$ のとき (軸が右外)

つまり $a<1$ のとき

グラフより

最小値は $x=a+1$ のとき

$f(a+1)=a^2-2a+2$



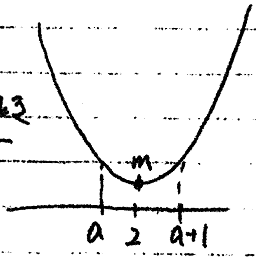
(ii) $a<2\le a+1$ のとき (軸を含む)

つまり $1\le a<2$

グラフより

最小値は $x=2$ のとき

$f(2)=1$

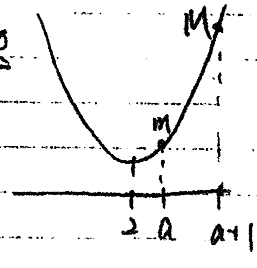


(iii) $2\le a$ のとき (軸が左外)

グラフより

最小値は $x=a$ のとき

$f(a)=a^2-4a+5$



(2) 最大値

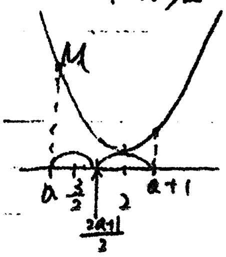
(i) $\frac{2a+1}{2}<2$ のとき (軸が右外 or 中心より右)

つまり $a<\frac{3}{2}$

グラフより

最大値は $x=a$ のとき

$f(a)=a^2-4a+5$



(ii) $\frac{2a+1}{2}=2$ のとき (軸が区間の中央)

つまり $a=\frac{3}{2}$ のとき

最大値は $x=a, a+1$

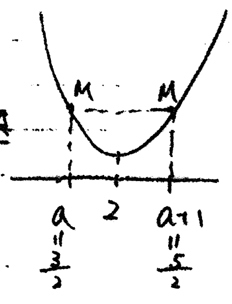
つまり $x=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ のとき

$f(a)=f(a+1)$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(\frac{3}{2}\right)+2$

$=\frac{9}{4}-3+2$

$=\frac{5}{4}$

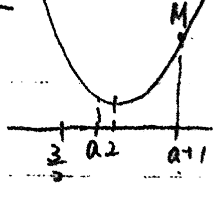


(iii) $2<\frac{2a+1}{2}$ のとき (軸が中心より左 or 左外)

つまり $\frac{3}{2}<a$ のとき

最大値は $x=a+1$ のとき

$f(a+1)=a^2-2a+2$



(練習2) $y=x^2+2x+2$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ ⟶ 区間の中心 $=\frac{2a+1}{2}$

$y=(x+1)^2+1$ 軸 $x=-1$, 頂点 $(-1,1)$

(1) 最小値

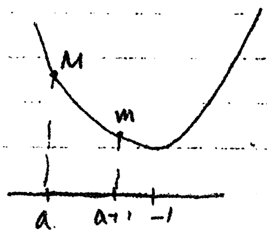
(i) $a+1<-1$ のとき

つまり $a<-2$ のとき

(軸は右外)

グラフより

最小値は $x=a+1$ のとき



$f(a+1)=(a+1+1)^2+1$

$=a^2+4a+4+1$

$=a^2+4a+5$

(ii) $a<-1\leqq a+1$

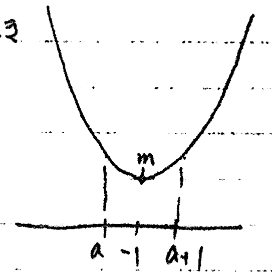
すなわち $-2\leqq a<-1$ のとき

(軸を含む)

グラフより

最小値 $x=-1$ のとき

$f(-1)=1$

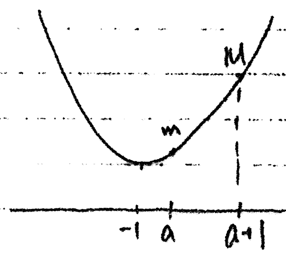


(iii) $-1\leqq a$ のとき

(軸が左外)

最小値 $x=a$ のとき

$f(a)=a^2+2a+2$



(2) 最大値

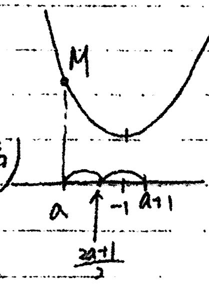
(i) $\frac{2a+1}{2}<-1$ のとき

$a<-\frac{3}{2}$ のとき

(軸が区間の中心より右)

最大値は $x=a$ のとき

$f(a)=a^2+2a+2$



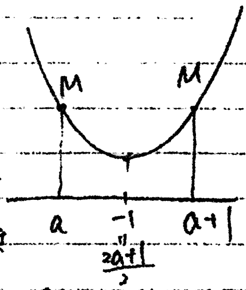
(ii) $\frac{2a+1}{2}=-1$ のとき

つまり $a=-\frac{3}{2}$ のとき

(軸が区間の中心)

最大値は $x=a,\ a+1$ のとき

つまり $x=-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}$ のとき



$f(-\frac{3}{2})=f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2}+1)^2+1$

$=(\frac{1}{2})^2+1$

$=\frac{5}{4}$

(iii) $-1<\frac{2a+1}{2}$ のとき

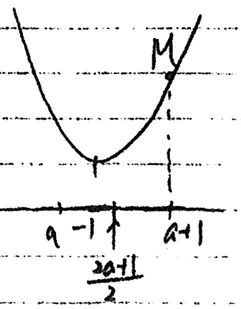
つまり $-\frac{3}{2}<a$ のとき

(軸が区間の中心より左)

最大値 $x=a+1$ のとき

$f(a+1)=(a+2)^2+1$

$=a^2+4a+5$



(練習3) $y=-x^2+4x \quad (a \leqq x \leqq a+1)$ → 区間の中心 $\frac{a+a+1}{2}=\frac{2a+1}{2}$

$y=-(x-2)^2+4$ 軸 $x=2$

頂点 $(2,4)$

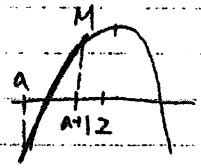
(1) 最大値 $M(a)$ のグラフ

(i) $a+1<2$ のとき

つまり $a<1$ のとき

(軸は左外)

M は $x=a+1$ のとき



$M(a)=f(a+1)=-(a+1)^2+4(a+1)$

$=-a^2-2a-1+4a+4$

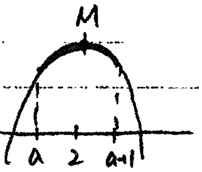
$=-a^2+2a+3 \to M(a)=-(a-1)^2+4$ (i)

(ii) $a<2\leqq a+1$ のとき

つまり $1\leqq a<2$ のとき

M は $x=2$ のとき

$M(a)=f(2)=4$ (ii)



(iii) $2<a$ のとき

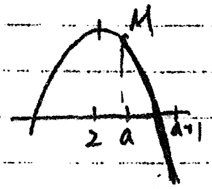
M は $x=a$ のとき

$M(a)=f(a)$

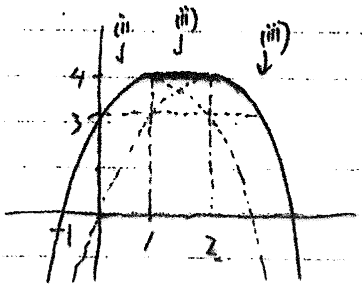
$=-a^2+4a$

↓

$M(a)=-(a-2)^2+4$ (iii)



(i)〜(iii) を合わせて



(2) 最小値 $m(a)$ のグラフ

(i) $\frac{2a+1}{2}<2$ のとき

つまり $a<\frac{3}{2}$ のとき

(軸が区間の中心より右側)

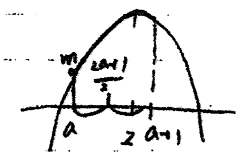
m は $x=a$ のとき

$M(a)=f(a)$

$=-a^2+4a$

↓

$M(a)=-(a-2)^2+4$ (i)



(軸が区間の中心)

(ii) $\frac{2a+1}{2}=2$ のとき

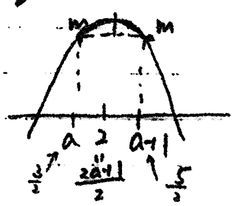
つまり $a=\frac{3}{2}$ のとき

m は $x=a,\ a+1$ のとき

つまり $x=\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$ のとき

$m(a)=f(\frac{3}{2})=f(\frac{5}{2})$

$=-(\frac{3}{2})^2+4\times\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}+6=\frac{15}{4}$ (ii)



(iii) $2<\frac{2a+1}{2}$ のとき

つまり $\frac{3}{2}<a$ のとき

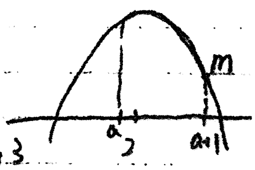
(軸は区間の中心より左側)

m は $x=a+1$ のとき

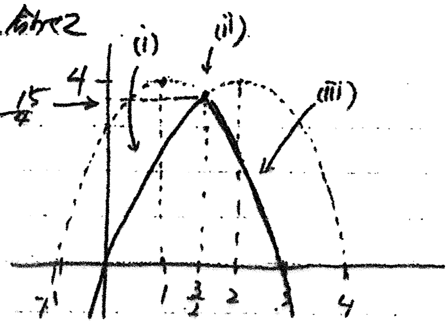
$m(a)=f(a+1)=-a^2+2a+3$

↓

$m(a)=-(a-1)^2+4$ (iii)



(i)〜(iii) を合わせて



(練習4) $y=2x^2-4ax$ $(0 \leqq x \leqq 1)$

$f(x)=2(x^2-2ax)$

$=2(x-a)^2-2a^2$

頂 $(a, -2a^2)$ 下に凸

$f(0)=0$

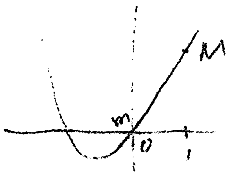
$f(1)=2-4a$

$f(a)=-2a^2$

(i) $a<0$ のとき

$x=0$ のとき $m=0$

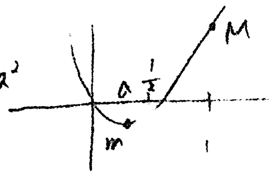
$x=1$ のとき $M=2-4a$



(ii) $0 \leqq a < \frac{1}{2}$ のとき

$x=a$ のとき $m=f(a)=-2a^2$

$x=1$ のとき $M=2-4a$

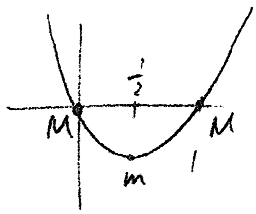


(iii) $a=\frac{1}{2}$ のとき

$x=\frac{1}{2}$ のとき $m=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=-\frac{1}{2}$

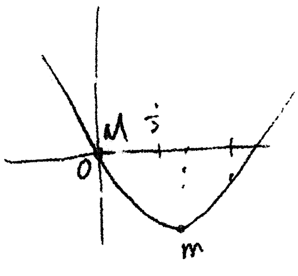
$x=0, 1$ のとき $M=0$



(iv) $\frac{1}{2}<a<1$ のとき

$x=a$ のとき $m=-2a^2$

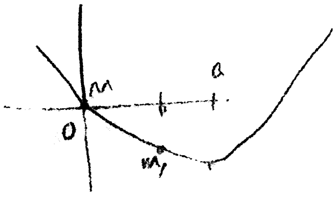
$x=0$ のとき $M=0$



(V) $1 \leqq a$ のとき

$x=1$ のとき $m=2-4a$

$x=0$ のとき $M=0$



(練習5) $y=x^2-2ax+2$ $(0 \leqq x \leqq 2)$

$f(x)=(x-a)^2-a^2+2$

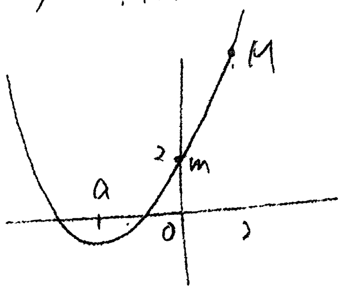
頂 $(a, -a^2+2)$ 下に凸

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(2)=6-4a \\ f(a)=-a^2+2 \end{cases}$$

(i) $a<0$ のとき

$x=0$のとき $m=2$

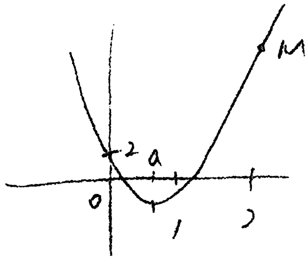
$x=2$のとき $M=6-4a$



(ii) $0 \leqq a < 1$ のとき

$x=a$のとき $m=-a^2+2$

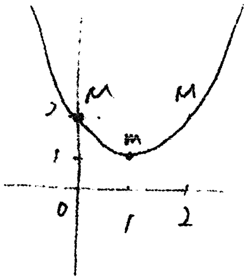
$x=2$のとき $M=6-4a$



(iii) $a=1$のとき

$x=1$のとき $m=f(a)$
$=-1^2+2$
$=1$

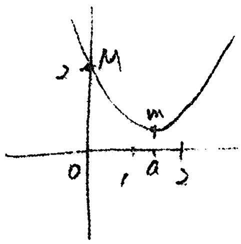
$x=0, 2$のとき $M=2$



(iv) $1<a<2$ のとき

$x=a$のとき $m=-a^2+2$

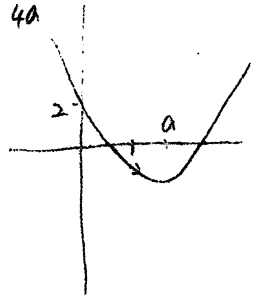
$x=0$のとき $M=2$



(V) $2 \leqq a$ のとき

$x=2$のとき $m=6-4a$

$x=0$のとき $M=2$



(1) 最大値

$a<1$ のとき $x=2$で $M=6-4a$

$a=1$ のとき $x=0, 2$で $M=2$

$1<a$ のとき $x=0$で $M=2$

(2) 最小値

$a<0$ のとき $x=0$で $m=2$

$0<a<2$ のとき $x=a$で $m=-a^2+2$

$a \leqq 2$ のとき $x=2$で $m=6-4a$