● 数学　第4回

解答

問1　(ア) 1　(イ) 2　(ウ) 3　(エ) 1　(オ) 2

問2　(ア) 1　(イ) 4　(ウ) 4　(エ) 1　(オ) 2

問3　(ア) (i) (a) 1　(b) 4　(c) 3　(ii) あ 2　い 1　う 8

(イ) (i) b，c　(ii) 1　(ウ) (i) 3　(ii) え 5　お 3

(エ) か 1　き 2　く 9　け 6

問4　(ア) 4　(イ) (i) 4　(ii) 2　(ウ) こ 7　さ 3

問5　(ア) し 5　す 3　せ 6　(イ) そ 7　た 1　ち 8

問6　(ア) 3　(イ) 3　(ウ) つ 1　て 2　と 8　な 2　に 5

配点

問1　各3点×5＝15点

問2　各4点×5＝20点

問3　(ア)(i)(a)(b)2点，(c)2点

(ii)4点

(イ)(i)3点，(ii)2点

(ウ)(i)2点，(ii)4点，(エ)6点

問4　(ア)4点，(イ)5点，(ウ)6点

問5　各5点×2＝10点

問6　(ア)4点，(イ)5点，(ウ)6点

—採点基準—　問3(ア)(i)(a)(b)　完答。

(イ)(i)　完答。

問4(イ)　完答。

〔解説〕

問1　(イ)　$\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=\frac{4}{12}-\frac{9}{12}=-\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-\frac{5}{12}$

(ウ)　$28a^3b^2\div 2b\div 2a^2=\frac{28a^3b^2}{2b\times 2a^2}=7ab$

(エ)　$\frac{7x+8y}{9}-\frac{x+3y}{2}=\frac{2(7x+8y)-9(x+3y)}{18}=\frac{14x+16y-9x-27y}{18}=\frac{5x-11y}{18}$

(オ)　$(\sqrt{5}-3)^2-(\sqrt{5}+3)=5-6\sqrt{5}+9-\sqrt{5}-3=11-7\sqrt{5}$

問2　(ア)　$x+3=X$ とおく。$(x+3)^2+4(x+3)-12=X^2+4X-12=(X-2)(X+6)=(x+3-2)(x+3+6)=(x+1)(x+9)$。

(イ)　解の公式より，$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times(-8)}}{2\times 2}=\frac{1\pm\sqrt{65}}{4}$。

(ウ)　$x=-3$ のとき，$y=\frac{2}{3}\times(-3)^2=6$ で最大，$x=0$ のとき $y=0$ で最小になる。よって，$a=0$，$b=6$。

(エ)　標本における黒い玉の割合は，$\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$。はじめに箱の中に入っていた白い玉の個数を x 個とすると，母集団における黒い玉の割合も $\frac{1}{20}$ と考えられるから，$(x+200)\times\frac{1}{20}=200$ より，$x=3800$。

(オ)　$x^2y-xy=xy(x-1)=(\sqrt{3}+2)\times(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+2-1)=(\sqrt{3}+2)\times\{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)\}$
$=(\sqrt{3}+2)\times(3-1)=2\sqrt{3}+4$

問3　(ア)　(ii)　(i)より，△ABC∽△ADG だから，AC：AG＝AB：AD，7：AG＝7：5，AG＝5 cm。$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CE}$ より，等しい弧に対する円周角は等しいから，∠BCD＝∠CBE。よって，錯角が等しいから，DC∥BE となる。△ABE で，FG∥BE より，AF：FB＝AG：GE＝5：3。よって，$FB=\frac{3}{5+3}AB=\frac{3}{8}\times 7=\frac{21}{8}$(cm)。

(イ)　(i)　b…この箱ひげ図には平均値は示されていない。

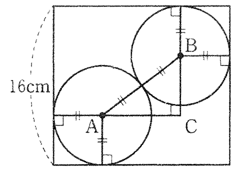
c…箱ひげ図から最頻値は読み取れない。

(ii)　データの個数が150個だから，得点の低い方から38番目の値が第1四分位数，75番目と76番目の値の平均値が第2四分位数，113番目の値が第3四分位数となる。よって，第1四分位数と第3四分位数の値はデータの中に必ずあるが，第2四分位数の値はデータの中にない場合もある(AかCかD)。また，得点が80点以上の生徒が38人以上いるのは第3四分位数が80点以上の場合である(AかD)。さらに，最高得点がいちばん高い教科(保健体育)は最大値が最も大きいDである。したがって，音楽のテストの得点の箱ひげ図はA。

(ウ)　(i)　自宅からバス停までの道のりは，80×15＝1200(m)，バスに乗ったのは，15＋8＝23(分)より，午後2時23分。よって，グラフは点(0, 0)，(15, 1200)，(23, 1200)，(30, 4000)を順に結んだ折れ線になる。

(ii)　自宅からバス停まで23分以内で行けばよいから，分速は，1200÷23＝52.1…(m)。求める分速の値は整数だから分速53m。

(エ) 問題の断面図において，点Aと点Bを結び，点A，Bと，円柱と球の接点を通る線分をそれぞれ引いて右のように点Cをとる。

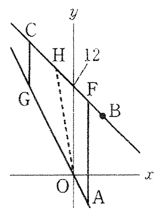


AB$=5\times2=10$(cm)，BC$=16-5\times2=6$(cm)，$\angle$ACB$=90^\circ$ より，$\triangle$ABC で，三平方の定理より，AC$=\sqrt{10^2-6^2}=8$(cm)。

よって，円柱の底面の半径は，$(8+5\times2)\div2=9$(cm)だから，円柱の体積は，$(\pi\times9^2)\times16=1296\pi$(cm^3)。

問 4 (ア) 点Aの y 座標は，$y=-\dfrac{8}{2}=-4$ より，A$(2,\ -4)$。点Dの x 座標は点Aの x 座標と等しく 2 で，AE:ED$=2:1$ だから，点Dの y 座標は，$4\times\dfrac{1}{2}=2$ より，D$(2,\ 2)$。点Dは関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点だから，$2=a\times2^2$，$a=\dfrac{1}{2}$。

(イ) B$(4,\ 8)$，C$(-6,\ 18)$ である。直線 BC の傾きは，$\dfrac{8-18}{4-(-6)}=-1$ で，求める直線はこの直線に平行だから，$m=-1$。$y=-x+n$ に点Dの座標の値を代入すると，$2=-2+n$，$n=4$。



四角形 AFHO は三角形と台形に分けられる。

(ウ) 直線 BC の式は $y=-x+12$ だから，F$(2,\ 10)$。また，直線 AO の式は $y=-2x$ だから，G$(-6,\ 12)$。四角形 AFCG は台形で，CG$=18-12=6$，FA$=10-(-4)=14$，高さは，$2-(-6)=8$ だから，(四角形 AFCG)$=\dfrac{1}{2}\times(6+14)\times8=80$。点Oを通り四角形 AFCG の面積を 2 等分する直線と直線 BC との交点をHとし，点Hの x 座標を t とすると，四角形 AFHO の面積について，$\dfrac{1}{2}\times12\times(0-t)+\dfrac{1}{2}\times(12+14)\times2=80\times\dfrac{1}{2}$ より，$t=-\dfrac{7}{3}$。

問 5 大，小 2 つのさいころの出た目の数の組$(a,\ b)$は，全部で $6\times6=36$(通り) ある。

(ア) $n=3$ となるのは，$a+b$ が 3，10になる場合だから，$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(4,\ 6)$，$(5,\ 5)$，$(6,\ 4)$の 5 通り。求める確率は，$\dfrac{5}{36}$。

(イ) $[m,\ n]$の値を表にまとめると右のようになる。白の面が上になっている石の個数と黒の面が上になっている石の個数が同じになるのは，黒の面が上になっている石が 3 個になるときで，右の表で影をつけた14通り。求める確率は，$\dfrac{14}{36}=\dfrac{7}{18}$。($m+n$ が 3，9 になる場合を考える。)

a，b の値によって，$[m,\ n]$の値をまとめた表

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	[1, 2]	[1, 3]	[2, 4]	[2, 5]	[3, 6]	[3, 0]
2	[1, 3]	[2, 4]	[2, 5]	[3, 6]	[3, 0]	[4, 1]
3	[2, 4]	[2, 5]	[3, 6]	[3, 0]	[4, 1]	[4, 2]
4	[2, 5]	[3, 6]	[3, 0]	[4, 1]	[4, 2]	[5, 3]
5	[3, 6]	[3, 0]	[4, 1]	[4, 2]	[5, 3]	[5, 4]
6	[3, 0]	[4, 1]	[4, 2]	[5, 3]	[5, 4]	[6, 5]

問 6 (ア) $\triangle$ADC で，三平方の定理より，AD$=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$(cm)。

(イ) $\triangle$EBC の面積が最も小さくなるのは CE の長さが最も短くなるときで，CE$\perp$AD となるときである。よって，$\triangle$ADC の面積について，$\dfrac{1}{2}\times$AD$\times$CE$=\dfrac{1}{2}\times$AC$\times$CD より，$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times$CE$=\dfrac{1}{2}\times4\times6$，CE$=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$cm。

(ウ) 三平方の定理より，AF$=$BF$=\sqrt{3^2+4^2}=5$(cm)。また，AB$=\sqrt{2}$AC$=4\sqrt{2}$cm。AG$=x$ cm とすると，GF$=(5-x)$cm と表されるから，BG^2 の値について，三平方の定理より，AB$^2-$AG$^2=$BF$^2-$GF^2 より，$(4\sqrt{2})^2-x^2=5^2-(5-x)^2$，$x=\dfrac{16}{5}$。三角すい GABC の底面を $\triangle$ABC とするときの高さはGから辺 AC に引いた垂線の長さだから，その高さを h cm とすると，AG : AF$=h$: FC より，$\dfrac{16}{5}:5=h:3$，$h=\dfrac{48}{25}$。

よって，体積は，$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\times4\right)\times\dfrac{48}{25}=\dfrac{128}{25}$(cm^3)。