● 数 学 　第3回

解答

問1 (ア) 4 (イ) 2 (ウ) 1 (エ) 2 (オ) 1

問2 (ア) 3 (イ) 2 (ウ) 1 (エ) 1 (オ) 4

問3 (ア) (i) (a) 4 (b) 3 (ii) あ 2 い 5 う 6 え 8
お 1 (イ) (i) 2 (ii) か 6 き 6 (ウ) く 3 け 6
(エ) こ 5 さ 8

問4 (ア) 3 (イ) (i) 3 (ii) 4
(ウ) し 1 す 7 せ 4 そ 1 た 3

問5 (ア) ち 1 つ 1 て 8 (イ) と 7 な 1 に 2

問6 (ア) 1 (イ) 5 (ウ) ぬ 2 ね 1 の 9

配点

問1 各3点×5＝15点
問2 各4点×5＝20点
問3 (ア)(i)各2点×2＝4点
(ii)4点
(イ)各3点×2＝6点
(ウ)5点，(エ)6点
問4 (ア)4点，(イ)5点，(ウ)6点
問5 各5点×2＝10点
問6 (ア)4点，(イ)5点，(ウ)6点

―採点基準― 問4(イ) 完答。

〔解説〕

問1 (イ) $\frac{1}{4}-\frac{3}{10}=\frac{5}{20}-\frac{6}{20}=-\left(\frac{6}{20}-\frac{5}{20}\right)=-\frac{1}{20}$

(エ) $\frac{5x+2y}{7}-\frac{x-3y}{2}=\frac{2(5x+2y)-7(x-3y)}{14}=\frac{10x+4y-7x+21y}{14}=\frac{3x+25y}{14}$

(オ) $(\sqrt{2}-1)^2+4(\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}+1+4\sqrt{2}-4=-1+2\sqrt{2}$

問2 (ア) $x-4=X$ とおく。$(x-4)^2-7(x-4)+10=X^2-7X+10=(X-2)(X-5)=(x-4-2)(x-4-5)=(x-6)(x-9)$。

(イ) 解の公式より，$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}=\frac{4\pm2\sqrt{7}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$。

(ウ) 関数 $y=ax^2$ では，x の値が4から6まで増加するときの変化の割合は，$\frac{a\times6^2-a\times4^2}{6-4}=\frac{20a}{2}=10a$。
関数 $y=2x+1$ では，変化の割合は一定で，x の係数に等しいから2である。よって，$10a=2$，$a=\frac{1}{5}$。

(エ) $9=\sqrt{81}$，$3\sqrt{10}=\sqrt{90}$ で，$78<81<90$ だから，$\sqrt{78}<9<3\sqrt{10}$。

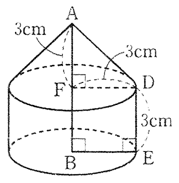
(オ) 最小値は5m以上10m未満，第1四分位数は短い方から8番目の値で15m以上20m未満，第2四分位数は短い方から16番目の値で20m以上25m未満，第3四分位数は短い方から24番目の値で30m以上35m未満，最大値は35m以上40m未満である。これをみたす箱ひげ図は，4。

問3 (ア) (ii) ABは直径だから，$\angle ADB=90^\circ$ より，$\angle ADB=\angle DFB=90^\circ$…①，$\angle DBA=\angle FBD$(共通)…②。
①，②より，$\triangle ADB \backsim \triangle DFB$。よって，AB：DB＝DB：FB，AB：5＝5：3，$AB=\frac{25}{3}$cm。また，
$\angle AEF=\angle BCF$(平行線の錯角)…③，$\angle EFA=\angle CFB$(対頂角)…④。③，④より，$\triangle EFA \backsim \triangle CFB$。
相似比は，$AF:BF=\left(\frac{25}{3}-3\right):3=16:9$ だから，$\triangle EFA:\triangle CFB=16^2:9^2=256:81$。

(イ) (i) 使う画びょうの個数は，4個，7個，10個，…と，3個ずつ増えるから，10＋3＋3＝16(個)。

(ii) 紙を x 枚はるときに使う画びょうの個数は，$4+3(x-1)=3x+1$(個)だから，$3x+1=200$ を解くと，
$x=\frac{199}{3}=66\frac{1}{3}$。$x$ は自然数だから，66枚まではることができる。

(ウ) $\triangle ABC$ で，中点連結定理より，DE∥AB，$DE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times6=3$(cm)。DからABに垂線DFを引くと，AF＝DF＝3cmより，1回転させると右の図のような円すいと円柱を合わせた立体ができる。よって，$\frac{1}{3}\times(\pi\times3^2)\times3+(\pi\times3^2)\times3=36\pi$(cm³)。

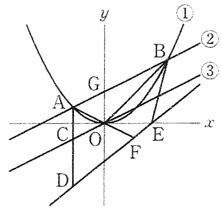


(エ) $\triangle AHE \backsim \triangle AGD$ より，EH：DG＝AE：AD＝AE：(AE＋ED)＝1：(1＋3)＝1：4。
よって，$DG=\frac{1}{2}DC$ より，$EH=\frac{1}{4}DG=\frac{1}{8}DC=\frac{1}{8}EF$。また，$\triangle BFI \backsim \triangle BCD$ より，
FI：CD＝BF：BC＝AE：AD＝1：4。よって，$FI=\frac{1}{4}CD=\frac{1}{4}EF$。
したがって，$HI=EF-EH-FI=EF-\frac{1}{8}EF-\frac{1}{4}EF=\frac{5}{8}EF$。

問4 (ア) 点Aは曲線①上の点だから，$y=ax^2$ に $x=-2$，$y=1$ を代入すると，$1=a\times(-2)^2$，$a=\frac{1}{4}$。

(イ) B(4, 4)となる。直線②の傾きは，$\frac{4-1}{4-(-2)}=\frac{1}{2}$ で，平行な2直線は傾きが等しいから，直線③の式は $y=\frac{1}{2}x$。点Cの y 座標は，$y=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$ より，C$(-2,\ -1)$。点Dの y 座標を t とすると，AC：CD＝2：3 より，$\{1-(-1)\}:(-1-t)=2:3$，$t=-4$。よって，D$(-2,\ -4)$。また，E(3, 0)だから，直線DEの傾きは，$m=\frac{0-(-4)}{3-(-2)}=\frac{4}{5}$。$y=\frac{4}{5}x+n$ に点Eの座標の値を代入すると，$0=\frac{4}{5}\times3+n$，$n=-\frac{12}{5}$。

(ウ) 直線AOの式を求めると，$y=-\frac{1}{2}x$。この式と直線DEの式を連立方程式として解くと，$x=\frac{24}{13}$，$y=-\frac{12}{13}$ より，F$\left(\frac{24}{13},\ -\frac{12}{13}\right)$。また，直線②の式を求めると，$y=\frac{1}{2}x+2$ となるから，直線②と y 軸との交点をGとすると，G(0, 2)。



よって，(四角形AFEB)＝△AOG＋△BOG＋△BOE＋△FOE
$=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times\frac{12}{13}=\frac{174}{13}$(cm²)。

問5 mの値によって点Pが移動する点をまとめると右の表のようになる。また，大，小2つのさいころの目の出方は全部で $6\times6=36$(通り)ある。

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
点	C	F	E	C	G	G	A	H	C	G	E

(ア) 点Pが点Fに移動するのは $m=3$ となる場合だから，$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ の2通り。確率は，$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$。

(イ) おうぎ形OAPの面積が円Oの面積の $\frac{1}{4}$ になるのは点Pが点Cか点Gに移動するときで，$m=2$，5，6，7，10，11となる場合だから，$(a,\ b)=(1,\ 1)$，$(1,\ 4)$，$(1,\ 5)$，$(1,\ 6)$，$(2,\ 3)$，$(2,\ 4)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 2)$，$(3,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$，$(4,\ 6)$，$(5,\ 1)$，$(5,\ 2)$，$(5,\ 5)$，$(5,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(6,\ 4)$，$(6,\ 5)$ の21通り。求める確率は，$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$。

問6 (ア) △EFHを底面とし，IEを高さとする三角すいとみると，体積は，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times\frac{18}{5}=\frac{12}{5}$(cm³)。

図1

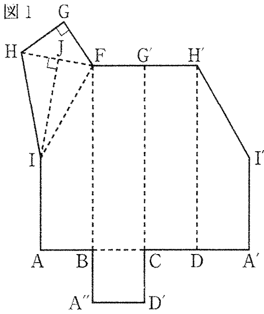
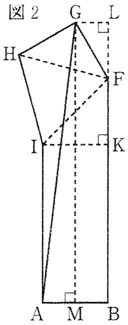


図2



(イ) 点IはAEの中点だから，$\text{IE}=\frac{1}{2}\text{AE}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$(cm)。
△GFHは直角二等辺三角形だから，$\text{FH}=\sqrt{2}\text{FG}=2\sqrt{2}$ cm。
点IからFHに垂線IJを引くと，IF＝IHより，点JはFHの中点になるから，$\text{FJ}=\frac{1}{2}\text{FH}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$(cm)。
△IFEで，$\text{IF}^2=\text{IE}^2+\text{EF}^2=(2\sqrt{3})^2+2^2=16$，
△IFJで，$\text{IJ}^2=\text{IF}^2-\text{FJ}^2=16-(\sqrt{2})^2=14$ より，
$\text{IJ}=\sqrt{14}$cm。
求める表面積は右の図1の展開図で，△GFH＋△IFH＋(六角形FIAA′I′H′)＋(正方形A″BCD′)だから，
$\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)+\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{14}\right)+\left\{4\sqrt{3}\times8-\left(\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}\right)\times2\right\}+(2\times2)=6+2\sqrt{7}+28\sqrt{3}$(cm²)。

(ウ) 最短の線を含む面の展開図は右上の図2のようになる。点IからBFに垂線IKを引き，点GからBFの延長に垂線GLを引くと，IK＝FK＝2 cmより，△KFIは直角二等辺三角形だから，∠IFK＝45°。△IFHは1辺が $2\sqrt{2}$ cmの正三角形だから，∠IFH＝60°。また，∠GFH＝45°。
よって，∠GFL＝180°－(45°＋60°＋45°)＝30°より，△FGLは内角が30°，60°，90°の直角三角形だから，
$\text{GL}=\frac{1}{2}\text{FG}=\frac{1}{2}\times2=1$(cm)，$\text{FL}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{FG}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$(cm)。
点GからABに垂線GMを引くと，$\text{GM}=\text{LB}=\sqrt{3}+4\sqrt{3}=5\sqrt{3}$(cm)，MB＝GL＝1 cmより，
AM＝2－1＝1(cm)。よって，△AGMで，$\text{AG}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{19}$(cm)。