数　学　第3回

解答

問1	(ア)　3	(イ)　2	(ウ)　1	(エ)　2	(オ)　4
問2	(ア)　2	(イ)　2	(ウ)　1	(エ)　3	(オ)　3
	(カ)　3				
問3	(ア)　(i)(a)　1	(b)　2	(ii)　$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$(cm²)		
	(イ)　4	(ウ)　大人　7(人)，学生　33(人)			
	(エ)　(i)　40	(ii)　60			
問4	(ア)　3	(イ)　(i)　4	(ii)　6	(ウ)　F(12, 16)	
問5	(ア)　3	(イ)　$\dfrac{3}{10}$			
問6	(ア)　3	(イ)　4	(ウ)　$\dfrac{64}{3}$(cm³)		

配点

問1　各3点
問2　(ア)，(イ)各3点
　　他各4点
問3　(ア)(i)4点，(エ)各2点
　　他各5点
　　(ア)(i)，(ウ)完答
問4　各5点　(イ)完答
問5　各5点
問6　各5点

解説

問1(ア)　$-3-(-7)=-3+7=4$

(イ)　$48ab^2\div(-4b)=-\dfrac{48ab^2}{4b}=-12ab$

(ウ)　$\sqrt{45}-\dfrac{25}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}-\dfrac{25}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$=3\sqrt{5}-\dfrac{25\times\sqrt{5}}{5}=3\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

$=-2\sqrt{5}$

(エ)　$\dfrac{4x-3y}{12}-\dfrac{x+2y}{4}$

$=\dfrac{4x-3y}{12}-\dfrac{3(x+2y)}{12}$

$=\dfrac{4x-3y-3(x+2y)}{12}$

$=\dfrac{4x-3y-3x-6y}{12}$

$=\dfrac{x-9y}{12}$

(オ)　$(x-4)^2-(x+3)(x-5)$

$=x^2-8x+16-(x^2-2x-15)$

$=x^2-8x+16-x^2+2x+15$

$=-6x+31$

問2(ア)　$(x+6)^2-8(x+6)-20$

$=A^2-8A-20=(A+2)(A-10)$

$=(x+6+2)(x+6-10)$

$=(x+8)(x-4)$

(イ)　$2x^2+5x-1=0$ を解の公式で解くと，

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+8}}{4}$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

(ウ)　$y=ax^2$ について x の値が2から4まで増加するときの変化の割合は，

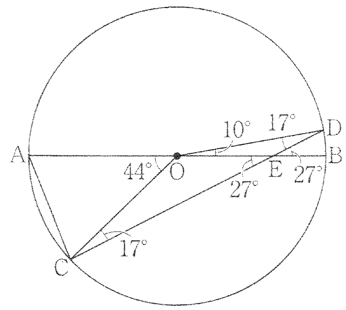
$\dfrac{a\times4^2-a\times2^2}{4-2}=\dfrac{16a-4a}{2}=\dfrac{12a}{2}=6a$

これが $y=2x-3$ の変化の割合と等しいので，$6a=2$　よって，$a=\dfrac{1}{3}$

(エ)　$\sqrt{98n}=7\sqrt{2n}$ より，$n=2\times1^2$，2×2^2，2×3^2，…のときに $\sqrt{98n}$ は自然数となる。よって，2番目に小さい自然数 n は，$n=2\times2^2=8$

(オ)　ガソリン1Lで15km走るので，b km走るためには $\dfrac{b}{15}$ Lのガソリンが必要である。ガソリンは a L入っていたので残りの量は $a-\dfrac{b}{15}$(L)で，これが c L以下なので，$a-\dfrac{b}{15}\leqq c$

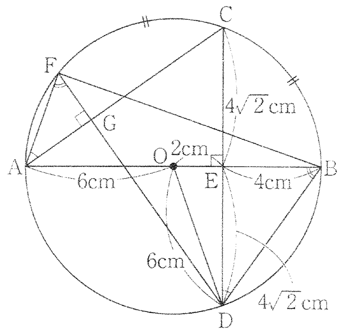
(カ)　△OEDで内角と外角の関係より，
∠ODE = 27° − 10° = 17°
△OCDは二等辺三角形なので，
∠OCD = ∠ODC = 17°
△OCEで内角と外角の関係より，
∠AOC = 27° + 17° = 44°
△OACは二等辺三角形なので，
∠OAC = (180° − 44°) ÷ 2
　　= 136° ÷ 2 = 68°
よって，∠BAC = 68°



問3(ア)(i)　$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角が等しいので，
∠ABD = ∠AFD となる。
また，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{FC}$ だから，
∠BDC = ∠FAC である。

(ii)　BO = 6 cm，BE = 4 cm だから，
OE = 6 − 4 = 2cm
△ODEで，$DE^2=6^2-2^2=36-4=32$
DE > 0 より $DE=4\sqrt{2}$ なので，
$DC=2DE=8\sqrt{2}$

△DBE で，$DB^2 = (4\sqrt{2})^2 + 4^2$
$= 32 + 16 = 48$
$DB > 0$ より，$DB = 4\sqrt{3}$
△DCG と△DBE で，∠CDG = ∠BDE，
∠DCG = ∠DBE より，△DCG ∽ △DBE
よって，DC：DB = CG：BE より，
$8\sqrt{2} : 4\sqrt{3} = CG : 4$，
$CG = \dfrac{32\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$(cm)
OB ⊥ CD より，$CE = DE = 4\sqrt{2}$ cm
だから，△ACE で，
$AC^2 = AE^2 + CE^2 = 8^2 + (4\sqrt{2})^2$
$= 64 + 32 = 96$
$AC > 0$ より，$AC = 4\sqrt{6}$(cm)
よって，$AG = AC - CG$
$= 4\sqrt{6} - \dfrac{8\sqrt{6}}{3} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$(cm)
△DBE ∽ △AFG より，
DE：AG = BE：FG だから，
$4\sqrt{2} : \dfrac{4\sqrt{6}}{3} = 4 : FG$，
$4\sqrt{2}\,FG = \dfrac{16\sqrt{6}}{3}$
$FG = \dfrac{16\sqrt{6}}{3} \times \dfrac{1}{4\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(cm)
したがって，
$△AFG = \dfrac{1}{2} \times AG \times FG$
$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\sqrt{6}}{3} \times \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$
$= \dfrac{8\sqrt{18}}{9} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$(cm²)



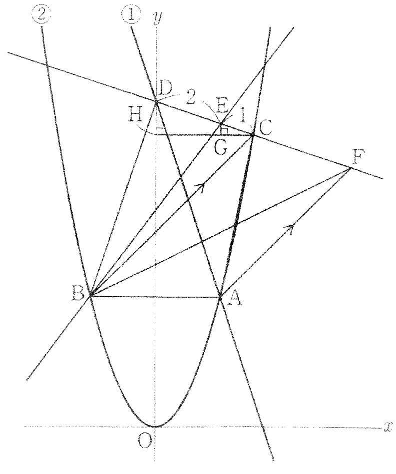
(イ)　A　中央値を含む階級：20 点以上 30 点未満の階級(○)
平均値 27 点＞最頻値 25 点(○)
20 点未満の生徒の数：12 人で 30%(×)
　B　中央値を含む階級：20 点以上 30 点未満の階級(○)
平均値 25.75 点＜最頻値 35 点(×)
20 点未満の生徒の数：14 人で 35%(○)
　C　中央値を含む階級：30 点以上 40 点未満の階級(×)
平均値 28.5 点＜最頻値 35 点(×)
20 点未満の生徒の数：12 人で 30%(×)
　D　中央値を含む階級：20 点以上 30 点未満の階級(○)
平均値 25.5 点＞最頻値 25 点(○)
20 点未満の生徒の数：14 人で 35%(○)
以上より，説明をすべて満たしているものは，D である。

(ウ)　大人の人数を x 人，学生の人数を y 人とする。
入館者数より，$x + y = 40$ …①
料金より，$2200x + 800y = 2200 \times (1 - 02) \times x + 800 \times (1 - 0.3) \times y + 11000$ …②
②の式を整理して，
$2200x + 800y = 1760x + 560y + 11000$
$440x + 240y = 11000$
$11x + 6y = 275$ …③
①× 11 −③より，$5y = 165$，$y = 33$
①に代入して，$x = 7$

(エ)　この水そうの容積は，
$90 \times 100 \times 80 = 720000$(cm³) $= 720$(L)
であるから，1 分間に入れる水の量は，
$720 \div 18 = 40$(L)
また，$720 \div 12 = 60$ より 12 L ずつ水を抜くと 60 分で空になる。

問 4(ア)　点 A の座標は，$y = -3x + 20$ に $x = 4$ を代入して，$y = -12 + 20 = 8$
よって，A(4，8)
$y = ax^2$ に $x = 4$，$y = 8$ を代入して，
$8 = a \times 4^2$，$16a = 8$，$a = \dfrac{1}{2}$

(イ)　点 C の座標は，$y = \dfrac{1}{2}x^2$ に $x = 6$ を代入して，$y = \dfrac{1}{2} \times 6^2 = \dfrac{1}{2} \times 36 = 18$
よって，C(6，18)
CE：ED = 1：2 で下の図より，



CG：GH = 1：2
CH = 6 だから，$CG = 6 \times \dfrac{1}{1 + 2} = 2$，

$GH = 6 - 2 = 4$
$DH = 20 - 18 = 2$ だから，
$EG = 2 \times \frac{1}{1+2} = \frac{2}{3}$
$18 + \frac{2}{3} = \frac{56}{3}$　よって，$E\left(4,\ \frac{56}{3}\right)$
また，点 B の座標は $(-4,\ 8)$ だから，
直線 BE の式 $y = mx + n$ で，
$m = \left(\frac{56}{3} - 8\right) \div \{4 - (-4)\}$
$= \left(\frac{56}{3} - \frac{24}{3}\right) \times \frac{1}{8} = \frac{32}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{3}$
$y = \frac{4}{3}x + n$ に $x = -4,\ y = 8$ を代入して，
$8 = \frac{4}{3} \times (-4) + n,\ n = 8 + \frac{16}{3} = \frac{40}{3}$

(ウ)　前のページの図のように，点 A を通り直線 BC に平行な直線と直線 CD との交点を F とすると，△FBC ＝△ABC なので，
四角形 ACDB ＝△CBD ＋△ABC …①，
△BFD ＝△CBD ＋△FBC …②
①，②より，四角形 ACDB ＝△BFD なので，この点 F の座標を求めればよい。
直線 BC の式の傾きを c とすると，
$c = \frac{18 - 8}{6 - (-4)} = \frac{10}{10} = 1$
直線 AF の式を $y = x + d$ として $x = 4$，$y = 8$ を代入して，$8 = 4 + d$，$d = 4$
よって，$y = x + 4$ …③
また，直線 CD の式を $y = ex + 20$ とすると，$e = \frac{18 - 20}{6 - 0} = -\frac{1}{3}$ より，
$y = -\frac{1}{3}x + 20$ …④
③，④を連立方程式として解くと，
$x + 4 = -\frac{1}{3}x + 20$，$\frac{4}{3}x = 16$，$x = 12$
③に代入して，$y = 16$　よって，$F(12,\ 16)$

問 5　下の表は，各欄で左側が $a \times b$，右側が $a + b$，黒い欄が A さんの得点で，白い欄が B さんの得点，数字の太字が勝った方の得点を表している。

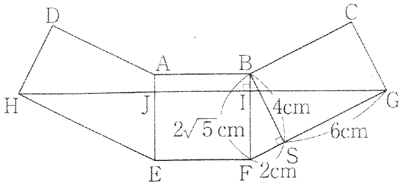
a＼b	2		4		6		8	
1	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	**9**
3	**6**	5	**12**	7	**18**	9	**24**	11
5	**10**	7	**20**	9	**30**	11	**40**	13
7	**14**	9	**28**	11	**42**	13	**56**	15
9	**18**	11	**36**	13	**54**	15	**72**	17

(ア)　A さんが勝ったのは，黒い欄で太字の箇所だから，$(a,\ b) = (3,\ 4)，(3,\ 6)，(3,\ 8)，(5,\ 6)，(5,\ 8)，(7,\ 8)$ の 6 通りである。よって確率は，$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

(イ)　10 点差以上で B さんが勝ったのは，上の表で太線で囲まれた箇所である。
よって，$(a,\ b) = (5,\ 4)，(7,\ 4)，(7,\ 6)，(9,\ 4)，(9,\ 6)，(9,\ 8)$ の 6 通りだから，
確率は，$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

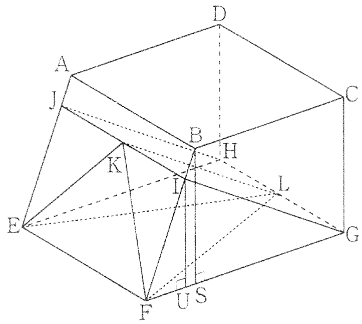
問 6 (ア)　台形 $BFGC = (6 + 8) \times 4 \times \frac{1}{2} = 28(cm^2)$
だから，四角柱の体積は，$28 \times 5 = 140(cm^3)$

(イ)　下の図のように展開図に表すと，4 点 G，I，J，H が 1 直線状にあるときが $GI + IJ + JH$ が最も短くなる場合である。



点 B から辺 FG に垂線を引き，その交点を S とすると，△BFS と△GFI で，
∠BFS ＝∠GFI，∠BSF ＝∠GIF より，
△BFS ∽△GFI だから，
$BS : GI = BF : GF$ で，
$BF^2 = BS^2 + FS^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$
$BF > 0$ より $BF = 2\sqrt{5}$ (cm)，
よって，$4 : GI = 2\sqrt{5} : 8$ より，
$2\sqrt{5}\ GI = 32$，$GI = \frac{32}{2\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$
$= \frac{16\sqrt{5}}{5}$ (cm)
△GFI ≡△HEJ より，$GI = JH$ だから，
$GI + IJ + JH = \frac{16\sqrt{5}}{5} + 5 + \frac{16\sqrt{5}}{5}$
$= 5 + \frac{32\sqrt{5}}{5}$ (cm)

(ウ)　点 I から辺 FG に垂線を引き，その交点を U とすると，下の図で，△IFU ∽△BFS だから，$BS : IU = BF : IF$



ここで，△GFI ∽△BFS だから，
$IF : SF = GF : BF$ より，
$IF : 2 = 8 : 2\sqrt{5}$ で，$2\sqrt{5}\ IF = 16$，
$IF = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ (cm)
よって，$4 : IU = 2\sqrt{5} : \frac{8\sqrt{5}}{5} = 2 : \frac{8}{5}$
$= 5 : 4$，$5IU = 16$ より，$IU = \frac{16}{5}$ (cm)
三角すい KEFL の底面を△EFL と見たときの高さは IU に等しいから，
三角すい KEFL の体積は，
$\frac{1}{2} \times EF \times FG \times IU \times \frac{1}{3}$
$= \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{16}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{64}{3}(cm^3)$