

高校準備講座 第5回 実数

- ・実数
 - 有理数 (分数で表せる数。整数, 有限小数, 循環小数のいずれか)
 - 無理数 (分数で表せない, 循環しない無限小数)
- ・絶対値...数直線上で, 原点からの距離を実数 a の絶対値といい, 記号 $|a|$ で表す。
 $|0| = 0$ である。

Pattern. 1 絶対値の性質

★POINT★

- ① $|a| \geq 0$ ② $a \geq 0$ のとき, $|a| = a$ $| \cdot |$ の中が正ならそのままはずす。
 $a < 0$ のとき, $|a| = -a$ $| \cdot |$ の中が負なら $| \cdot | = -(\cdot)$ にする。

(例題 1) 次の値を求めよ。

(1) $|-5| = 5$

(2) $|-5+2| = |-3| = 3$

(3) $|-4|+|-5| = 4+5 = 9$

(4) $|1-\sqrt{2}|$
 $1 < \sqrt{2}$ のとき $1-\sqrt{2} < 0$
 与式: $-(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$

(例題 2) 次の式の絶対値の記号をはずせ。 ※場合分けの利用。

(1) $|x-1|$

(i) $x < 1$ のとき
 与式: $-(x-1) = -x+1$

(ii) $1 \leq x$ のとき
 与式: $x-1$

(2) $|x+2|+|2x-1|$

(i) $x < -2$ のとき
 与式: $-(x+2) - (2x-1) = -x-2-2x+1 = -3x-1$

(ii) $-2 \leq x < \frac{1}{2}$ のとき
 与式: $x+2 - (2x-1) = x+2-2x+1 = -x+3$

(iii) $\frac{1}{2} \leq x$ のとき
 与式: $x+2 + 2x-1 = 3x+1$

$| \cdot |$ の中が符号が変わるところ

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

	(i) $x < -2$	(ii) $-2 \leq x < \frac{1}{2}$	(iii) $x \geq \frac{1}{2}$
$x+2$	-	+	+
$2x-1$	-	-	+

Pattern. 2 平方根の性質

★POINT★

- ① $a \geq 0$ のとき $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$
- ② $a \geq 0$ のとき $\sqrt{a^2} = a$
 $a < 0$ のとき $\sqrt{a^2} = -a$ すなわち $\sqrt{a^2} = |a|$ ※ a の正負によって場合分け!
- $a > 0, b > 0, k > 0$ のとき ③ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ④ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ⑤ $\sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$

(例題 3) $\sqrt{x^2-6x+9}$ を x の整式で表せ。

与式: $\sqrt{(x-3)^2}$

(i) $x < 3$ のとき
 与式: $-(x-3) = -x+3$

(ii) $x \geq 3$ のとき
 与式: $x-3$

Pattern. 3 式の値

★POINT★

- ① $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ ② $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ を利用。
 まず, $x+y, xy$ を求める!

(例題 4) $x = \frac{2}{\sqrt{5}+1}, y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき次の式の値を求めよ。 $x = \frac{2}{(\sqrt{5}+1) \times (\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(1) x^2+y^2
 $x+y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$
 $xy = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1$
 $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3$

(2) x^2y+xy^2
 $x^2y+xy^2 = xy(x+y) = 1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}$

(3) x^3+y^3
 $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (\sqrt{5})^3 - 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

高校準備講座 第6回 実数(2)

<2重根号のはずし方>

$$a > 0, \quad b > 0 \text{ のとき, } \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a > b > 0 \text{ のとき, } \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Pattern. 1 2重根号のはずし方

★POINT★

$\sqrt{\text{和} + 2\sqrt{\text{積}}}$ となる $\sqrt{a}$ と $\sqrt{b}$ をみつける!

(例題 1) 次の2重根号をはずして式を簡単にせよ。

$$(1) \sqrt{8+2\sqrt{15}} \\ \text{和} \quad \text{積} \quad \begin{matrix} 15 & 1 \\ 5 & 3 \end{matrix} \\ = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$(2) \sqrt{12-6\sqrt{3}} \\ = \sqrt{12-2\sqrt{27}} \quad \left[\begin{matrix} \text{和} \\ \text{積} \end{matrix} \text{の形} \right] \\ = \sqrt{9} - \sqrt{3} \\ = 3 - \sqrt{3}$$

$$(3) \sqrt{3-\sqrt{5}} \\ = \sqrt{\frac{12-4\sqrt{5}}{4}} \quad \left[\begin{matrix} \text{和} \\ \text{積} \end{matrix} \text{の形} \right] \\ = \frac{\sqrt{12-2\sqrt{20}}}{2} \\ = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

Pattern. 2 不等式の解き方

★POINT★

・原則方程式と同じ。両辺にマイナスをかけるときだけ気を付ける!

例) $2 < 3 \rightarrow (\text{両辺に}-1\text{をかける}) \rightarrow -2 > -3$

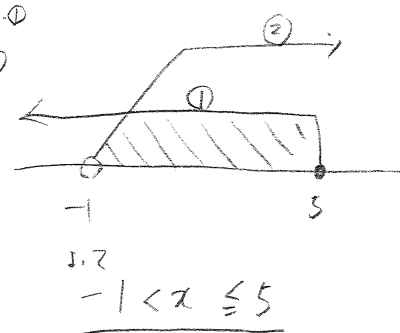
(例題 2) 次の不等式を解け。

$$(1) -2x + 5 > -7 \\ -2x > -12 \\ x < 6 \quad \left[\times (-\frac{1}{2}) \right]$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 7 \geq 4x - 3 \dots \textcircled{1} \\ 3x + 5 > -2x \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{より} \\ -2x \geq -10 \\ x \leq 5$$

$$\textcircled{2} \text{より} \\ 5x > -5 \\ x > -1$$



Pattern. 3 絶対値の方程式・不等式

★POINT★

① $| \quad |$ の中身の正負に着目して正・負で場合分け!

② 場合分けしたときの範囲も考える!

(例題 3) 次の方程式・不等式を解け。

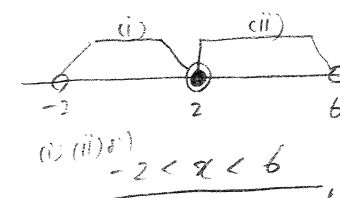
$$(1) |x-4| = 3x$$

$$\begin{aligned} (i) x < 4 \text{ かつ } (ii) 4 \leq x \text{ かつ } \\ -(x-4) = 3x & \quad x-4 = 3x \\ -x-4-3x=0 & \quad -2x=4 \\ -4x=4 & \quad x=-2 \quad \times \\ x=-1 & \quad (4 \leq x \text{ かつ } \text{不適}) \end{aligned}$$

$$(i)(ii) \text{より} \\ x = -1$$

$$(2) |x-2| < 4$$

$$\begin{aligned} (i) x < 2 \text{ かつ } (ii) 2 \leq x \text{ かつ } \\ -(x-2) < 4 & \quad x-2 < 4 \\ x-2 > -4 & \quad x < 6 \\ x > -2 & \quad 2 \leq x < 6 \\ -2 < x < 2 & \quad \text{最終的に } -2 < x < 6 \end{aligned}$$



(例題 4) 次の方程式・不等式を解け。

$$(1) |x| + |x-1| = 3x$$

$$\begin{aligned} (i) x < 0 \text{ かつ } \\ -(x) - (x-1) = 3x & \quad x - (x-1) = 3x \\ -2x+1=3x & \quad 1=3x \\ -5x=-1 & \quad x=\frac{1}{3} \quad \times \\ x=\frac{1}{5} \quad (\text{不適}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) 0 \leq x < 1 \text{ かつ } \\ x - (x-1) = 3x & \quad 1 = 3x \\ x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) 1 \leq x \text{ かつ } \\ x + x - 1 = 3x & \quad -x = 1 \\ x = -1 \quad (\text{不適}) \end{aligned}$$

$$(i) \sim (iii) \text{より} \\ x = \frac{1}{3}$$

$$(2) |x| + |x-1| > 3x$$

$$\begin{aligned} (i) x < 0 \text{ かつ } \\ -(x) - (x-1) > 3x & \quad x - (x-1) > 3x \\ -2x+1 > 3x & \quad 1 > 3x \\ -5x > -1 & \quad x < \frac{1}{3} \\ x < 0 & \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) 0 \leq x < 1 \text{ かつ } \\ x - (x-1) > 3x & \quad 1 > 3x \\ 3x < 1 & \quad x < \frac{1}{3} \\ 0 \leq x < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) 1 \leq x \text{ かつ } \\ x + x - 1 > 3x & \quad 2x - 1 > 3x \\ -x > -1 & \quad x < 1 \\ \text{解なし} \end{aligned}$$

